



**Titre:** Analyse et simulation de la bioconvection en milieu fluide  
Title:

**Auteur:** Zineddine Alloui  
Author:

**Date:** 2006

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Alloui, Z. (2006). Analyse et simulation de la bioconvection en milieu fluide  
Citation: [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/7760/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7760/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE ET SIMULATION DE LA BIOCONVECTION  
EN MILIEU FLUIDE

ZINEDDINE ALLOUI  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AOÛT 2006



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-20821-2*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-20821-2*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITE DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée

ANALYSE ET SIMULATION DE LA BIOCONVECTION  
EN MILIEU FLUIDE

Présentée par : ALLOUI Zineddine

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. KAHAWITA René, Ph.D., président

M. BILGEN Ertugrul, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. NGUYEN Hung The, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. PRUD'HOMME Michel, Ph.D., membre

M. MASSON Christian, Ph.D., membre

## DÉDICACE

À la mémoire de mes parents

À mes frères et soeurs

À mes neveux et nièces

À tous mes amis

À tous ceux qui me sont chers

## REMERCIEMENTS

Je désire exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mes directeurs de recherche, le professeur Hung The Nguyen, et le professeur Ertugrul Bilgen, pour mon encadrement, leurs encouragements, l'aide et le soutien permanent qu'ils m'ont offert. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

J'adresse mes remerciements les plus vifs au président et aux membres de jury, les professeurs René Kahawita, Michel Prud'homme et Christian Masson pour m'avoir fait l'honneur de passer mes travaux en revue et d'avoir pris le temps de lire ce manuscrit.

Je voudrais aussi remercier mes collègues et amis, Tri Nguyen-Quang, Amine Yahiaoui, Mauricio Chavez et Dina Sandrine Rakoto pour leur appui et leur coopération tout au long de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Lamine Kalla, Youcef Halli, Yacine Boucekine et Djamel Esselami pour leur amitié et pour les fructueuses discussions que nous avons eues.

Enfin, j'aimerais dire un gros merci et exprimer mon extrême gratitude à toute ma famille pour leur patience et leurs encouragements tout au long de ces années d'études et de recherche.

## RÉSUMÉ

Les microorganismes existent dans presque tout environnement aqueux sur terre et constituent la plus grande partie de la biomasse terrestre (plus de 50%). Plusieurs de ces microorganismes aquatiques y compris les bactéries, les protozoaires ciliés et flagellés et les larves planctoniques sont plus denses que l'eau et nagent en moyenne vers une direction verticale. Les cellules nageant ainsi, s'accumulent près de la surface supérieure du milieu fluide, ce qui crée un gradient de densité dans le fluide et peut conduire au développement d'instabilité convective. Cette instabilité est semblable à celle observée dans une couche fluide chauffée par le bas (Convection de Rayleigh-Benard), d'où le nom bioconvection. La bioconvection est un phénomène de grande importance dans beaucoup de problèmes naturels et industriels comme par exemple, l'océanographie, l'industrie pharmaceutique, les applications micro-hydrauliques concernant les biotechnologies et la médecine. La compréhension du mouvement des microorganismes est également très importante pour le contrôle de certains processus technologiques et industriels tels que, la récupération microbienne assistée du pétrole, la bioremédiation et la transformation biochimique dans les bioréacteurs.

La présente thèse porte sur l'étude de la bioconvection gravitactique dans les milieux fluides. Dans cette étude, nous utilisons le modèle continu basé sur les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement fluide et l'équation de diffusion-convection pour la concentration des microorganismes. Les trois cas suivants sont considérés :

Dans le premier cas, le système étudié consiste à une suspension de microorganismes gravitactique inclus dans un cylindre vertical. Nous supposons que le fluide est incompressible et l'écoulement est axisymétrique. Les paramètres adimensionnels gouvernant le problème sont le nombre de Rayleigh de bioconvection, le nombre de Peclet, le nombre de Schmidt et le rapport de forme du cylindre. La méthode de solution est basée sur la méthode des volumes de contrôle avec un maillage décalé. Les effets du

facteur de forme et du nombre de Peclet sur le début et le développement de la convection sont étudiés. Nous avons ainsi constaté qu'aux nombres de Peclet très faibles, le phénomène est très semblable à la convection de Bénard, par contre pour des valeurs plus grandes du nombre de Peclet, la bioconvection gravitactique est qualitativement et quantitativement très différente de la convection de Bénard, la différence fondamentale étant la bifurcation souscritique de l'état de diffusion.

Nous avons ensuite étudié la convection naturelle avec la présence d'un écoulement vertical traversant. Ce problème est très intéressant parce qu'il présente des grandes similitudes avec le problème de la bioconvection gravitactique. Le problème est gouverné par deux paramètres adimensionnels, le nombre de Rayleigh thermique et le nombre de Peclet. La théorie de la stabilité linéaire est d'abord utilisée pour déterminer le seuil critique de l'apparition de la convection. Les équations gouvernantes le problème sont ensuite résolues numériquement pour les nombres de Rayleigh supercritiques. Les résultats obtenus ont montré que la convection naturelle avec la présence d'un écoulement vertical traversant se développe de façon souscritique similairement au cas de la bioconvection gravitactique. Ceci est en parfait accord avec les résultats de stabilité linéaire et les résultats de la méthode d'énergie de la littérature. Nous avons constaté également que l'écoulement dans ce cas se développe de façon multicellulaire.

Finalement, nous avons étudié le cas d'une couche fluide contenant une suspension de microorganismes gravitactiques et soumise à un gradient de température. L'écoulement est régi dans ce cas par les équations de Navier-Stokes avec l'approximation de Boussinesq, l'équation de diffusion-convection pour la concentration des microorganismes et l'équation d'énergie pour la température. La théorie de la stabilité linéaire a été employée pour obtenir les diagrammes de stabilité et les seuils critiques de l'apparition de la convection. Nous avons constaté que les effets thermiques peuvent stabiliser ou déstabiliser la suspension, et diminuer ou augmenter la longueur d'onde des cellules bioconvectives. La résolution numérique à travers la méthode des volumes de



contrôles a été ensuite effectuée pour les nombres de Rayleigh supercritiques. Les résultats montrent la grande influence du gradient thermique sur la bioconvection gravitactique en terme de courbe de bifurcation et du nombre de Rayleigh critique. Nous avons observé une transition de la bifurcation souscritique à une bifurcation supercritique lorsque nous appliquons un chauffage par le bas, cependant le refroidissement par le bas n'affecte pas la forme du diagramme de bifurcation mais aide à stabiliser la suspension.

## ABSTRACT

Multitude of microorganisms exist in almost every conceivable aqueous environment on earth and have been estimated to form a major part (more than 50%) of the world's biomass. Many of these aquatic microorganisms including bacteria, ciliate and flagellate protozoa and the planktonic larvae are denser than water and swim preferentially upwards. Since the cells tend to swim upwards, they concentrate near the top surface of the fluid domain. This causes density gradients in the fluid that may result in the development of convection instability. This instability leads to a spontaneous pattern formation similar to that observed in a layer of fluid heated from below (Rayleigh-Bénard convection), which is called bioconvection. Bioconvection is a phenomenon of great importance in many natural and industrial problems as for example in oceanography, pharmaceutical industry, micro-fluidic applications relevant to biotechnology and medicine. Understanding the motion of microorganisms is also a key to understanding and controlling some technological and industrial processes such as microbial-enhanced oil recovery, bioremediation and biochemical transformation in bioreactors.

The present thesis deals with the study of the gravitactic bioconvection within a fluid medium. In this study, we use the continuum model based on the Navier-Stokes equation for the fluid flow and the diffusion-convection equation for the concentration of the motile microorganisms. Three principal cases have been considered and are briefly described below.

In the first case, the system studied consists of a suspension of gravitactic microorganisms enclosed in a vertical cylinder. We assume that the fluid is incompressible and the flow is axisymmetric. The non dimensional governing parameters are the bioconvection Rayleigh number, the Peclet number, the Schmidt number and the aspect ratio of the cylinder. The numerical method solution is based on

the control volume approach with a uniform staggered grid. The effects of the aspect ratio and Peclet number on the onset and development of convection are investigated. We thus found that at very low Peclet numbers the phenomenon is similar to Bénard convection, but for larger Peclet numbers, gravitactic bioconvection is qualitatively and quantitatively different from Bénard convection, the most fundamental character being a subcritical bifurcation from the diffusion state.

The second case concerns the natural convection under the influence of a constant vertical throughflow. This problem is considered because it presents similarities with the problem of gravitactic bioconvection. The problem is thus governed by two non-dimensional parameters, the thermal Rayleigh number and the throughflow Peclet number. The onset of convection is first determined by the linear stability theory. The development of convection at supercritical Rayleigh numbers is next investigated by solving the complete set of governing equations. It is found that the development of natural convection under the effect of throughflow is due to subcritical instabilities, in agreement with both the linear stability and energy stability theories. It was shown also that convection under the effect of a throughflow develops into multicellular flow patterns.

In the last part of this thesis, the influence of a temperature gradient on the stability of a suspension of motile gravitactic microorganisms in a fluid layer is considered. The pattern formation within the suspension was described by Navier-Stokes equation with Boussinesq approximation for the fluid flow, the diffusion-convection equation for the concentration of the motile microorganisms and thermal energy equation for the temperature. The linear perturbation theory is used to obtain the stability diagram and the critical conditions for the onset of convection. It is found that the thermo-effects may either stabilize or destabilize the suspension, and decrease or increase the wavelength of the bioconvective pattern. The development of thermo-bioconvection at supercritical Rayleigh numbers is next investigated by solving the complete set of governing

equations. Both cases of heating or cooling from below were examined. Numerical simulations of thermo-bioconvection in a square enclosure were carried out. The vertical gradient of temperature is established by maintaining the horizontal boundaries at fixed temperatures. The results exhibit the influence of thermo-effects on the bifurcation diagram and the flow structure. We have reported a transition from a subcritical bifurcation to a supercritical bifurcation when the thermal Rayleigh number is increased, while the bifurcation remains subcritical when the cooling from below is applied.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE .....	iv
REMERCIEMENTS .....	v
RÉSUMÉ .....	vi
ABSTRACT .....	ix
TABLE DES MATIÈRES .....	xii
LISTE DES FIGURES.....	xv
LISTE DES TABLEAUX.....	xx
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES.....	xxi
LISTE DES ANNEXES.....	xxiv
 INTRODUCTION .....	 1
 CHAPITRE I : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE .....	 7
1.1 Introduction.....	7
1.2 Bioconvection gravitactique en milieu fluide .....	7
1.3 Convection naturelle en présence d'un écoulement vertical.....	14
1.4 Thermo-bioconvection .....	16
 CHAPITRE II : FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME.....	 19
2.1 Introduction .....	19
2.2 Bioconvection gravitactique en milieu fluide .....	19
2.2.1 Équations gouvernantes .....	20
2.2.2 Formulation vorticité fonction de courant.....	22
2.2.3 Équations adimensionnelles .....	23
2.3 Convection en présence d'un écoulement vertical.....	24
2.3.1 Équations gouvernantes .....	25
2.3.2 Formulation fonction de courant.....	26
2.3.3 Équations adimensionnelles .....	27

2.4 Thermo-bioconvection gravitactique en milieu fluide .....	28
2.4.1 Équations gouvernantes .....	28
2.4.2 Équations adimensionnelles sous la formulation vorticité fonction de courant .....	30
2.5 Étude de la stabilité linéaire .....	31
2.5.1 Convection naturelle en présence d'un écoulement vertical .....	31
2.5.2 Thermo-bionvection dans une couche fluide .....	33
2.6 Méthode de solution numérique .....	35
2.6.1 Discrétisation des équations .....	36
2.6.2 Procédure de calcul .....	37
 CHAPITRE III : BIOCONVECTION GRAVITACTIQUE DANS UN CYLINDRE VERTICAL .....	 39
3.1 Introduction .....	39
3.2 État de diffusion .....	40
3.3 Validation du code numérique .....	42
3.4 Résultats et discussion .....	43
3.5 Conclusion .....	52
 CHAPITRE IV : CONVECTION NATURELLE EN PRÉSENCE D'UN ÉCOULEMENT VERTICAL TRAVERSANT .....	 54
4.1 Introduction .....	54
4.2 Étude de la stabilité linéaire .....	55
4.2.1 Validation du code numérique .....	55
4.2.2 Résultats et discussion .....	56
4.3 Solution numérique .....	61
4.3.1 Validation du code numérique .....	61
4.3.2 Résultats et discussion .....	62
4.4 Conclusion .....	69

CHAPITRE V : THERMO-BIOCONVECTION GRAVITACTIQUE .....	70
5.1 Introduction .....	70
5.2 Étude de la stabilité linéaire .....	71
5.3 Solution numériques .....	79
5.3.1 Validation du code numérique .....	79
5.3.1 Résultats et discussion .....	81
5.4 Conclusion .....	90
CONCLUSION .....	92
RÉFÉRENCES .....	96
ANNEXES .....	102

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 :	Schéma général de la cavité rectangulaire .....	21
Figure 2.2 :	Schéma général de la cavité poreuse.....	26
Figure 2.3 :	Schéma du modèle physique et les conditions aux limites thermiques ...	29
Figure 2.4 :	Maillage et distribution des nœuds sur le volume de contrôle.....	36
Figure 3.1 :	Etat initial de concentration homogène (à gauche) et état final de diffusion exponentiel (à droite) dans une suspension de Tetrahymena Pyriformis contenue dans une cavité carrée de 100mm de côté et 1mm d'épaisseur (Nguyen-Quang et Alloui, 2005). ....	41
Figure 3.2 :	Évolution temporelle de la concentration à l'intérieur d'un cylindre vertical avec $A_c = 1$ et $Pe = 10$ .....	42
Figure 3.3 :	Comparaison entre la solution numérique et la solution analytique de diffusion pour : (a) $Pe = 0.1$ , (b) $Pe = 1$ , (c) $Pe = 10$ .....	43
Figure 3.4 :	Diagramme de bifurcation : variation de $\psi_{\max}$ en fonction de $Ra$ pour $A_c = 1$ et $Pe = 0.1$ .....	45
Figure 3.5 :	Diagramme de bifurcation : variation de $\psi_{\max}$ en fonction de $Ra$ pour $A_c = 1$ et $Pe = 1$ .....	45
Figure 3.6 :	Diagramme de bifurcation : variation de $\psi_{\max}$ en fonction de $Ra$ pour $A_c = 1$ et $Pe = 10$ .....	46
Figure 3.7 :	Diagramme de bifurcation : variation de $\psi_{\max}$ en fonction de $Ra$ pour $A_c = 0.1$ et $Pe = 0.1$ .....	46



Figure 3.8 :	Diagramme de bifurcation : variation de $\psi_{\max}$ en fonction de $Ra$ pour $A_c = 0.1$ et $Pe = 1$ .....	47
Figure 3.9 :	Diagramme de bifurcation : variation de $\psi_{\max}$ en fonction de $Ra$ pour $A_c = 0.1$ et $Pe = 10$ .....	47
Figure 3.10 :	Variation de formation de la bioconvection en fonction de la variation de gravité dans une suspension de $10^6$ cell/ml de <i>Tetrahymena pyriformis</i> (Mogami et al., 2004).....	49
Figure 3.11 :	Effet de $Pe$ sur les lignes de courant et les isoconcentrations pour $A_c = 1$ ; (a) $Pe = 0.1$ , $Ra = 18000$ ; (b) $Pe = 1$ , $Ra = 1900$ ; (c) $Pe = 5$ , $Ra = 700$ ; (d) $Pe = 10$ , $Ra = 900$ .....	51
Figure 3.12 :	Effet de $Pe$ sur les lignes de courant et les isoconcentrations pour $A_c = 0.1$ ; (a) $Pe = 0.1$ , $Ra = 4.6 \times 10^7$ ; (b) $Pe = 1$ , $Ra = 4 \times 10^6$ ; (c) $Pe = 5$ , $Ra = 4.3 \times 10^5$ ; (d) $Pe = 10$ , $Ra = 1.6 \times 10^5$ .....	52
Figure 4.1 :	Diagramme de stabilité pour différents nombres de Peclet sous la condition aux limites isotherme. ....	57
Figure 4.2 :	Variation du nombre de Rayleigh critique avec le nombre de Peclet. ....	58
Figure 4.3 :	Variation du nombre de d'onde critique avec le nombre de Peclet. ....	58
Figure 4.4 :	a) Nombre de Rayleigh adimensionné en fonction du nombre de Peclet, b) Nombre d'onde adimensionné en fonction du nombre de Peclet. ....	60
Figure 4.5 :	Lignes de courant (en haut) et isothermes (en bas) au début de la convection pour : a) $Pe=0$ , b) $Pe=4$ , c) $Pe=8$ sous la condition aux limites isotherme.....	61

Figure 4.6 :	Comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature, fonction de courant et concentration. Bioconvection gravitactique dans une cavité poreuse avec $A=1$ , $Pe=10$ , $Ra = 245$ : a) Notre code, b) Résultat de Kuznetsov et Jiang (2001).....	62
Figure 4.7 :	Courbe de bifurcation pour la condition aux limites isotherme pour : a) $Pe=4$ , b) $Pe=8$ .....	64
Figure 4.8 :	Lignes de courant (en haut) et isothermes (en bas) pour $A=5$ , $Pe=8$ sous la condition isotherme : a) $Ra = Ra_c^{sub}$ , b) $Ra = Ra_c^{sup}$ .....	66
Figure 4.9 :	Variation de $Ra_c^{sub}$ et $Ra_c^{sup}$ avec le nombre de Peclet. ....	68
Figure 5.1 :	Diagramme de stabilité pour différents nombres de Rayleigh thermique pour $Pe = 0.1$ .....	72
Figure 5.2 :	Diagramme de stabilité pour différents nombres de Rayleigh thermique pour $Pe = 1$ .....	73
Figure 5.3 :	Diagramme de stabilité pour différents nombres de Rayleigh thermique pour $Pe = 10$ .....	73
Figure 5.4 :	Effet du nombre de Peclet sur; (a) le nombre de Rayleigh critique de bioconvection, (b) le nombre d'onde critique correspondant, pour différents nombres de Rayleigh thermiques.....	74
Figure 5.5 :	Effet du nombre de Rayleigh thermique sur; (a) le nombre de Rayleigh critique de bioconvection, (b) le nombre d'onde critique correspondant, pour différents nombres de Peclet.....	76
Figure 5.6 :	Nombre de Rayleigh critique de bioconvection $Ra_c$ en fonction du nombre de Rayleigh thermique $Ra_T$ pour le cas $Pe = 0$ .....	77

- Figure 5.7 : Lignes de courant (en haut), isoconcentration (au centre) et isothermes (en bas) pour  $Pe = 1$  ; (a)  $Ra_T = -1000$  , (b)  $Ra_T = 0$  , (c)  $Ra_T = 1000$  ....78
- Figure 5.8 : Lignes de courant (à gauche), isoconcentration (au centre) et isothermes (à droite) pour  $Pe = 1$  ; (a)  $Ra_T = -1000$  , (b)  $Ra_T = 0$  , (c)  $Ra_T = 1000$  ..79
- Figure 5.9: Diagramme de bifurcation : variation de  $\psi_{\max}$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $Ra = 0$  (pas de bioconvection). .....81
- Figure 5.10: Diagramme de bifurcation : variation de  $\psi_{\max}$  en fonction de  $Ra$  pour  $Ra_T = 0$  (pas d'effet thermique). .....82
- Figure 5.11: Diagramme de bifurcation  $\psi_{\max}(Ra)$  pour  $Ra_T = 0, 500, 1000$  et  $1708$ ....84
- Figure 5.12: Diagramme de bifurcation  $\psi_{\max}(Ra)$  pour  $Ra_T = 0, -1000, -2000$  et  $-3000$  .....84
- Figure 5.13: Lignes de courant, isoconcentration et isothermes au Rayleigh souscritique: a)  $Ra_T = 0$  ,  $Ra_c^{sub} = 567$  ,  $\psi_{\max} = 1.46$  , b)  $Ra_T = 500$  ,  $Ra_c^{sub} = 468$  ,  $\psi_{\max} = 0.99$  , c)  $Ra_T = 1000$  ,  $Ra_c^{sub} = 315$  ,  $\psi_{\max} = 0.08$  ....86
- Figure 5.14: Effet du nombre de Rayleigh thermique sur le nombre de Rayleigh souscritique de bioconvection. ....87
- Figure 5.15: Lignes de courant, isoconcentration et isothermes pour  $Ra = 10^3$  ; .....88
- (a)  $Ra_T = 4 \times 10^3$  ,  $\psi_{\max} = 7.63$  ,(b)  $Ra_T = 0$  ,  $\psi_{\max} = 4.97$  , (c)  $Ra_T = -4 \times 10^3$  ,  $\psi_{\max} = 1.35$  .....88

- Figure 5.16: Effet du nombre de Rayleigh thermique sur les profils horizontaux et verticaux à mi-hauteur ( $y = 0.5$ ) et mi-largeur ( $x = 0.5$ ) de la cavité pour  $Ra = 10^3$  .....89
- Figure 5.17: Effet des parois verticales rigides et effet de courbure sur le diagramme de bifurcation  $\psi_{\max}(Ra)$  pour  $Ra_T = 1000$  .....90

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1: Comparaison entre nos résultats et ceux de la de Nield (1998) et Homsy (1976) pour la condition aux limites isotherme et pour plusieurs nombre de Peclet .....	56
Tableau 5.1: Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum, nombre de Nusselt et nombre de Sherwood avec les résultats de Mamou et al. (2001) pour $A = 1.5$ , $Ra_T = 40000$ , $Ra_S = -10^5$ , $Pr = 1$ , $Le = 10^{1/2}$ . ....	81
Tableau 5.2: Effet du maillage sur les valeurs maximales de la fonction de courant et la concentration .....	81

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$A$	rapport de forme de la cavité rectangulaire $A = L / H$
$A_c$	rapport de forme du cylindre $A_c = R / H$
$D_c$	diffusivité des cellules
$F$	gradient de température adimensionnelle
$g$	accélération gravitationnel
$\bar{J}$	flux cellulaire adimensionnelle
$K$	perméabilité du milieu poreux
$\vec{k}$	vecteur unitaire dans la direction vertical
$Le$	nombre de Lewis $Le = \alpha_t / D_c$
$n$	concentration adimensionnelle des microorganismes
$\bar{n}$	concentration adimensionnelle cellulaire moyenne
$\vec{n}$	vecteur normal à la paroi
$\tilde{n}$	perturbation de la concentration adimensionnelle
$p$	pression adimensionnelle
$Pe$	nombre de Peclet de bioconvection $Pe = V_c H / D_c$
$Pe_t$	nombre de Peclet de l'écoulement ascendant $Pe_t = V_0 H / \alpha_t$
$Ra$	nombre de Rayleigh de bioconvection $Ra = g \vartheta \Delta \rho \bar{n} Pe H^3 / \rho \nu D_c$
$Ra_p$	nombre de Rayleigh du milieu poreux $Ra_p = g K \beta \Delta T H / \alpha_t \nu$
$Ra_T$	nombre de Rayleigh thermique $Ra_T = g \beta \Delta T H^3 / \nu \alpha_t$
$Sc$	nombre de Schmidt $Sc = \nu / D_c$
$t$	temps adimensionnel $t = D_c t' / H^2$
$T$	température adimensionnelle $T = (T' - T_0) / \Delta T$
$\tilde{T}$	perturbation de la température adimensionnelle

$\Delta T$	écart de température
$\bar{u}$	vitesse du fluide adimensionnelle $\bar{u} = \bar{u}'H / D_c$
$V_c$	vitesse gravitactique de la cellule
$V_0$	vitesse de l'écoulement ascendant
$r, x, y, z$	coordonnées adimensionnelles $r, x, y, z = (r', x', y', z') / H$

### SYMBOLES GRECS

$\alpha$	nombre d'onde adimensionnel
$\alpha_c$	nombre d'onde critique adimensionnel
$\alpha_t$	diffusivité thermique
$\beta$	coefficient d'expansion thermique
$\varepsilon$	tolérance
$\rho$	masse volumique du fluide
$\rho_c$	masse volumique de la cellule
$\rho_w$	masse volumique de l'eau
$\Delta\rho$	différence entre densité de cellule et densité d'eau $\Delta\rho = \rho_c - \rho_w$
$\nu$	viscosité cinématique
$\mu$	viscosité dynamique
$\vartheta$	volume de la cellule
$\omega$	vorticité adimensionnelle $\omega = \omega'H^2 / D_c$
$\tilde{\omega}$	perturbation de la vorticité adimensionnelle
$\sigma$	taux de croissance
$\psi$	fonction de courant adimensionnelle $\psi = \psi' / D_c$
$\tilde{\psi}$	perturbation de la fonction de courant adimensionnelle

**EXPOSANT**

$'$	variable dimensionnelle
$sub$	souscritique
$sup$	supercritique

**INDICES**

$max$	maximum
$min$	minimum
$B$	état de base
$c$	critique
$o$	état de référence



**LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE A .....	102
ANNEXE B.....	105

## INTRODUCTION

### ***Généralités***

Contrairement à la convection de Bénard qui a été étudié intensément depuis plus d'une centaine d'année, la bioconvection dont le nom introduit par Platt (1961) est un phénomène assez récent qui a suscité l'intérêt que depuis quelques dizaines d'années seulement. Le phénomène de bioconvection a été observé tant dans la nature qu'en laboratoire. Dans la nature la formation de la bioconvection peut avoir un effet très profond sur toute une population de microorganismes. Dans le cas des algues géotactiques, par exemple, le mouvement de circulation généré par la bioconvection permet à tous les microorganismes de recevoir de la lumière et de l'oxygène. Il est concevable que si ce mouvement n'existait pas, seule les microorganismes qui sont près de la surface pourraient survivre. La formation de mouvements convectifs permet donc à une grande population de survivre normalement avec le même ensemble de ressources.

Comprendre le comportement collectif des microorganismes est très important dans plusieurs domaines de biotechnologie et promet d'avoir un horizon d'applications très large notamment dans la désinfection (la désinfection est le processus de l'utilisation de microorganismes pour ingérer une toxine et la transformer en substance d'inoffensif). L'interaction entre les particules solides et la convection induite par des microorganismes peut être très importante dans certain processus industriels, comme par exemple dans l'amélioration de la récupération microbienne du pétrole brute (Geng et Kuznetsov, 2004), ou encore dans l'industrie pharmaceutique en augmentant le mélange et en ralentissant l'arrangement des particules solides (Geng et Kuznetsov, 2005).

Dans la bioconvection, le mouvement convectif dans la suspension est généré par le gradient de densité causé par la natation des microorganismes vers une direction

particulière. Dans ce cas, le mouvement du fluide est décrit par les équations classiques de Navier-Stokes. Cependant la description du mouvement des microorganismes peut se faire de deux façons différentes. Dans la première, les microorganismes sont traités comme une quantité continue dans le fluide, et modélisé par une équation de conservation de concentration avec un terme de plus qui représente le mouvement de natation des microorganismes. La deuxième façon consiste à considérer chaque microorganisme comme une particule à part entière, chaque particule, tout en étant entraînée par le fluide a un mouvement vertical stationnaire auquel peut s'ajouter un mouvement de nature aléatoire. Suivant la façon de traiter les microorganismes il y a donc deux modèles principaux qui s'appellent modèle continu et modèle discret. Le modèle continu a été introduit par Childress et al. (1975) et le modèle discret par Childress et Peyret (1976).

Seulement deux études ont été consacrées au modèle discret, la première étant celle de Childress et Peyret (1976) et la deuxième plus récente est celle réalisé par Hopkins et Fauci (2002). L'inconvénient principal de ce modèle est la limitation dans le nombre de microorganismes simulé et le temps énorme de calcul exigé. En effet, malgré les progrès réalisés ces dernières années dans l'informatique, les machines actuelles ne permettent de modéliser qu'un nombre limité de microorganismes (de l'ordre de  $10^5$  cellules), ce nombre étant insuffisant pour une comparaison directe avec l'expérience. À cause de ces inconvénients, et vue que la plupart des études concernant la modélisation de la bioconvection utilisent le modèle continu, notre choix c'est basé sur l'utilisation de ce dernier pour notre étude plutôt que le modèle discret.

La natation des microorganismes est généralement causée par une réponse à certain stimulus extérieur, ce stimulus peut être un champ de gravité, un gradient chimique, une lumière, etc. Suivant le stimulus nous pouvons trouver divers types de bioconvection, citant par exemple la bioconvection gravitactique ou gyrotactique, oxytactique et phototactique. Plusieurs études ont concerné différents modèles de bioconvection (Hill

et al. 1989), (Hillesdon et Pedley, 1996), (Metcalf et Pedley, 2001). La première revue concernant les travaux effectués sur la bioconvection a été accompli par Pedley et Kessler (1992). Pour les études réalisées de 1992 jusqu'au 2004 il y a la revue de Hill et Pedley (2005).

Le modèle de la bioconvection gravitactique est très intéressant parce qu'il présente des similitudes avec la convection de Bénard. En effet, lorsque le nombre de Peclet qui caractérise la vitesse de natation des microorganismes est très faible, le phénomène de la bioconvection gravitactique devient très semblable à la convection naturelle de Bénard avec condition aux frontières isoflux (Bahloul et al., 2005). Cependant quand le nombre de Peclet est plus grand, une similitude très intéressante est observée avec la convection naturelle en présence d'un écoulement vertical traversant. Ce problème présente aussi un grand intérêt puisqu'il est souvent rencontré dans de nombreux systèmes naturels ou industriels, comme par exemple dans la récupération assistée du pétrole, la gazéification *in situ* du charbon, le stockage d'eau chaude en aquifère et le génie chimique (Quintard et Prouvost, 1982).

Dans l'ensemble des travaux cité précédemment concernant la bioconvection en milieu fluide, la suspension de microorganismes est supposée isotherme. Cependant, que ce soit dans la nature ou dans l'industrie, il y a de nombreux cas où les effets thermiques influence beaucoup l'apparition et le développement de la bioconvection. Un nombre limité d'étude analytique récente a été effectué par Kuznetsov (2005a, b et c) et Nield et Kuznetsov (2006) sur les effets du gradient de température sur la stabilité d'une suspension de microorganismes gyrotactiques.

Nous remarquons que dans les investigations portant sur la modélisation de la bioconvection, les travaux disponibles dans la littérature relatifs à la bioconvection gravitactique sont relativement peu nombreux et portent seulement sur quelques aspects du problème. Dans la majorité des cas, les études effectuées jusqu'à présent sont des

études analytiques du problème de stabilité. Seulement deux études ont été consacrées à la simulation numérique, réalisés par Fujita et Watanabe (1986) et Harashima et al. (1988).

C'est dans cet esprit que nous avons entamé notre étude. Le présent travail, de nature numérique, traite la bioconvection gravitactique dans les milieux fluides confinés, la convection naturelle avec la présence d'un écoulement vertical et la thermo-bioconvection dans une suspension de microorganismes gravitactiques.

### ***Objectifs de la présente étude***

Dans le but de modéliser le phénomène de la bioconvection dans les milieux fluides et d'approfondir les problèmes d'écoulement et de transfert de masse et de chaleur, nous nous proposons d'étudier :

- Le développement de la bioconvection gravitactique dans une cavité cylindrique. Nous nous intéresserons particulièrement aux effets des différents paramètres (notamment du nombre de Peclet et la géométrie) sur l'apparition et l'évolution de la bioconvection.
- Le problème de la convection naturelle en présence d'un écoulement vertical traversant.
- Les effets du gradient de température sur l'apparition et le développement de la bioconvection dans une suspension de microorganismes gravitactiques.

## ***Contenu de la thèse***

Cette thèse comporte six chapitres principaux.

- Dans le premier chapitre qui comporte la revue de la littérature, nous présentons une étude bibliographique portant sur les travaux de recherche qui ont été élaborés dans le domaine de la bioconvection en milieu fluide, la convection naturelle en présence d'un écoulement vertical traversant et la thermo-bioconvection en milieu fluide.
- Le deuxième chapitre est consacré à la formulation mathématique de notre problème. La première partie de la formulation concerne la bioconvection gravitactique en milieu fluide, la deuxième partie est consacrée à la convection en présence d'un écoulement vertical tandis que la troisième partie est dédiée à la thermo-bioconvection en milieu fluide. En fin de ce chapitre nous présentons les méthodes de résolution numériques du problème.
- Une étude de la bioconvection gravitactique dans un cylindre vertical est présentée au troisième chapitre. Les équations gouvernantes sont résolus numériquement en utilisant le concept des volumes de contrôle.
- Dans le quatrième chapitre, nous étudions la convection naturelle en présence d'un écoulement vertical traversant. Pour déterminer les seuils critiques de l'apparition de la convection, nous utilisons la méthode de stabilité linéaire, par la suite nous résolvons les équations gouvernant le problème par la méthode des volumes de contrôle. Les résultats de cette dernière méthode sont comparés ensuite à ceux obtenus par la méthode de stabilité linéaire, et par la méthode d'énergie trouvée dans la littérature.
- Le cinquième chapitre porte sur l'étude de la thermo-bioconvection dans une suspension de microorganismes gravitactiques.

- Enfin, une conclusion générale consacrée à la mise en évidence des différents points majeurs de cette étude ainsi que les perspectives envisagées à long terme qui peuvent faire l'objet d'autres recherches.
- Une description de la formulation de la bioconvection axisymétrique, de même que quelques définitions et exemples de microorganismes avec leurs propriétés physiques, sont données sous forme d'annexes à la fin de cette thèse.

# CHAPITRE I

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

### **1.1 Introduction**

La revue de la littérature est divisée en trois parties principales. La première sera consacrée aux études portant sur la bioconvection gravitactique dans les milieux fluides; la deuxième concernera la convection naturelle avec la présence d'un écoulement vertical ascendant traversant tandis que la troisième partie portera sur la thermo-bioconvection dans les milieux fluides.

### **1.2 Bioconvection gravitactique en milieu fluide**

Le phénomène de bioconvection a été connu et observé depuis 1848 (voir Wager, 1911), mais le nom «bioconvection» a été introduit en 1961 par Platt (1961). En étudiant une suspension de protozoaire, Wager (1911) a montré que l'apparition de la bioconvection nécessite que la natation des microorganismes soit dans le sens contraire de la gravité. Le phénomène de la bioconvection disparaît lorsque ces microorganismes meurent et descendent au fond du milieu en formant une couche inerte.

Très peu de travaux ont été consacrés à l'étude de stabilité et la simulation de la bioconvection gravitactique dans le milieu fluide. La première étude qui modélise l'apparition de la bioconvection avec la théorie de stabilité est celle de Plesset et Winet (1974). Leur modèle physique est constitué de deux couches superposées l'une au dessus



de l'autre, la couche supérieure étant un fluide homogène plus dense sur une couche de fluide moins dense. L'excès de densité dû à la présence de microorganismes dans la couche rend la situation gravitationnellement instable. Comme dans les problèmes de stabilité, la croissance d'une petite perturbation appliquée au système est analysée. Ces auteurs ont conclu que le mécanisme de développement d'instabilité est celui de Rayleigh-Taylor. La faiblesse du model utilisé par Plesset et Winet (1974) est qu'il néglige la diffusion entre les deux couches, car l'état de base présenté n'est pas une solution des équations gouvernantes, notamment l'équation de la conservation de concentration.

Le deuxième travail consacré à la modélisation de la bioconvection est celui de Childress et al. (1975), Levandowsky et al. (1975). En se basant sur l'équation de Navier-Stokes et l'équation de diffusion des microorganismes, ils ont modélisé la bioconvection gravitactique dans une couche fluide. La mobilité des microorganismes est décrite par une vitesse moyenne de natation et un tenseur de diffusivité. Ils ont considéré une couche fluide infini de hauteur  $H$  et ils ont déterminé analytiquement le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition de la bioconvection. Ils ont montré que la suspension est instable quand la hauteur de la couche fluide dépasse une certaine valeur critique.

Les premières simulations de la bioconvection gravitactique ont été réalisées sur la base du modèle discret par Childress et Peyret (1976), ils ont considéré la convection bidimensionnelle induite par des particules mobiles dans un fluide visqueux. Ces particules, tout en étant entraînées par le fluide, ont un mouvement vertical auquel s'ajoute un mouvement aléatoire. La méthode numérique intègre un schéma aux différences finies implicite à une représentation discrète du champ de particules. Ils ont traité les microorganismes comme des points mobiles dont chacun exerce une force sur le fluide et se déplace relativement au fluide par une superposition de deux mouvements, la natation verticale et un mouvement aléatoire. Childress et Peyret (1976) illustrent dans

leurs résultats l'influence des paramètres du système sur la formation de grands agrégats de particules et comparent leurs résultats aux observations effectuées dans des cultures de microorganismes gravitactiques. À partir d'un état initial dans lequel toutes les cellules (756 cellules) sont dans une région compacte au milieu du domaine de calcul (une cavité avec un facteur de forme égal à 2), ils ont montré que cet état peut se développer selon les paramètres du problème à différents états finaux dans lesquels les cellules peuvent demeurer, soit dans une seule région compacte, soit formé deux régions denses (rouleaux de convection), soit devenir assez dispersés mais mène toujours à un mouvement de convection. Bien que Childress et Peyret (1976) aient présenté divers résultats qualitatifs dans leur publication, le nombre de cellules qu'ils ont considérées (756 cellules) est loin d'être représentatif du problème étudié.

Fujita et Watanabe (1986) ont étudié numériquement la bioconvection gravitactique bidimensionnelle en utilisant les équations de Navier-Stokes avec l'approximation de Boussinesq et l'équation de diffusion de microorganismes, ces équations sont analogues aux équations de la convection de Bénard (L'analogie entre la bioconvection et la convection de Bénard a été démontrée par Keller et Segel (1970)). Les équations gouvernantes et les conditions aux limites sont approximées la méthode des différences finies avec un maillage décalé. Ils ont montré qu'en augmentant le nombre de Rayleigh, le système peut être mené à une situation chaotique via un état oscillant périodique, cette transition du régime d'écoulement est analogue à l'évolution de la convection de Bénard. Ces auteurs ont étudié l'évolution temporelle de la bioconvection bidimensionnelle pour quelques cas spécifiques.

Harashima et al. (1988) ont considéré un milieu fluide confiné et ont résolu les équations de Navier-Stokes et de conservation de cellules en utilisant la théorie de Childress et al. (1975) pour les microorganismes gravitactiques. Ils ont proposé l'énergie potentielle totale minimale comme un principe pour déterminer la dimension des rouleaux de l'état stationnaire. Leurs résultats sont raisonnablement conformes à ce principe.

Contrairement au modèle continu de Childress et al. (1975) qui considère la concentration des microorganismes comme une quantité continue, Hopkins et Fauci (2002) considèrent les microorganismes comme des particules discrètes, leur modèle est une extension du modèle de Childress et Peyret (1976) qui utilise une représentation discrète des microorganismes en même temps qu'une représentation continue du fluide. Cette représentation des microorganismes par des particules individuelles plutôt que par une concentration continue de densité, facilite l'évaluation directe de l'orientation des microorganismes en réponse à leur environnement. Cependant, les limitations actuelles des ordinateurs ne permettent pas de considérer plus de  $10^5$  particules, ce qui est insuffisant pour faire une comparaison directe avec l'expérience.

Dans les cinq dernières années, quelques travaux de simulation de la bioconvection dans le milieu fluide ont été développés pour le modèle gyrotactiques. Ghorai et Hill (1999) ont étudié le développement de la bioconvection gyrotactique en utilisant le modèle de base introduit par Pedley et al. (1988). Le système est gouverné par les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible et l'équation de conservation de microorganismes. Ces équations sont résolues numériquement en utilisant un schéma conservatif de différence finie. Ils ont étudié l'existence de deux différents types d'instabilité dans une cavité avec des surfaces libres sur les cotés, en fonction des différents paramètres de contrôle du problème, notamment le rapport de forme, le nombre gyrotactique et la vitesse de natation adimensionnelle. Ils ont montré que les panaches de bioconvection sont instables pour les deux types d'instabilité à partir d'une certaine valeur du rapport de forme de la cavité.

Ghorai et Hill (2000a) ont considéré une cavité rectangulaire bidimensionnelle allongée verticalement remplie d'une suspension de microorganismes gyrotactiques. La paroi supérieure de la cavité est supposée libre tandis que les autres parois sont considérées rigides. Un schéma conservatif de différence finies a été utilisé pour discrétiser les

équations gouvernantes. Ils ont examiné la dépendance de la longueur d'onde des panaches de bioconvection en fonction des paramètres de contrôle du problème qui sont la hauteur de la cavité et la concentration moyenne à l'intérieur de la cavité. Ils ont trouvé que la longueur d'onde des panaches augmente légèrement avec la hauteur de la cavité, contrairement aux observations expérimentales de Bees et Hill (1997) qui démontrent que la longueur d'onde diminue légèrement avec l'augmentation de la hauteur. Toutefois, en augmentant la concentration moyenne à l'intérieur de la cavité, la longueur d'onde diminue conformément aux observations expérimentales. Ils ont conclu que les résultats numériques s'accorde assez bien qualitativement et quantitativement aux observations expérimentales de Bees et Hill (1997). Ils ont expliqué que les différences constatées sont probablement dues aux hypothèses simplificatrices du modèle numérique, surtout que les expériences ont été effectuées en 3D tandis que les simulations ont été réalisées sur la base d'un modèle bidimensionnel.

Ghorai et Hill (2000b) ont présenté un travail sur l'existence des instabilités transitoires des modèles de bioconvection dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle dont la paroi inférieure est rigide et les autres parois sont libres. Les effets du rapport de forme, le nombre gyrotactique, la vitesse adimensionnelle et le nombre de Rayleigh ont été étudiés. Ils ont constaté que l'état final des panaches de bioconvection peut être soit stationnaire soit instationnaire dépendamment des paramètres de contrôle. Dans le cas instationnaire, deux types d'instabilité sont observés, le premier évolue de façon périodique sous forme de goutte qui se dilate en descendant vers le bas, et le second évolue de façon quasi périodique et prend la forme de zigzag.

Une étude de la bioconvection axisymétrique dans un cylindre vertical a été réalisée par Ghorai et Hill (2002), en utilisant le modèle de Pedley et al. (1988) avec des coordonnées polaires. La structure et la stabilité du problème ont été étudiées en fonction des paramètres de contrôle du problème, et une comparaison avec la bioconvection bidimensionnelle a été effectuée. Ils ont trouvé que pour l'ensemble des

valeurs des paramètres considérés, un seul type d'instabilité existe. La période des oscillations observées dans la bioconvection axisymétrique est plus réaliste et plus faible que celle de la bioconvection bidimensionnelle.

Récemment Kuznetsov et Avramenko (2004) ont examiné une suspension de microorganismes gyrotactique dans une couche fluide horizontale dans laquelle ils ajoutent des petites particules plus denses que l'eau. Ils ont utilisé la stabilité linéaire pour déterminer les effets des particules sur la valeur du Rayleigh critique. Les équations gouvernantes dans ce cas sont les équations de Navier-Stokes, l'équation de conservation des microorganismes et l'équation de conservation des particules. Ils ont déterminé analytiquement le seuil critique en fonction des différents paramètres du problème. Le résultat principal de cette étude est que le Rayleigh critique augmente lorsque la densité moyenne des particules solides additionnées augmente, ce qui signifie que les particules rendent la suspension plus stable.

Geng et Kuznetsov (2004) ont étudié numériquement l'impact des petites particules solides sur l'état stationnaire de la bioconvection de microorganismes gyrotactiques. Les petites particules plus denses que l'eau sont ajoutées à la surface supérieure du fluide lorsque l'état stationnaire de la bioconvection est atteint. Lorsque le processus de sédimentation commence, les petites particules solides se mêlent dans la convection et affectent l'écoulement du fluide causant la transition de la bioconvection vers un autre état stationnaire différent du premier.

Plus récemment, Bahloul et al. (2005) ont publié un travail concernant la bioconvection gravitactique dans une couche horizontale de fluide. Ils ont utilisé la théorie de la stabilité linéaire pour déterminer le seuil critique de l'apparition de la convection, et la dépendance du nombre de Rayleigh critique et de la longueur d'onde critique avec le nombre de Peclet. Ils ont trouvé que le développement de la convection est très différent de celui de la convection de Bénard avec condition de flux de chaleur imposé. Lorsque

le nombre de Peclet est très petit, la longueur d'onde critique est pratiquement nulle correspondant à un écoulement quasi parallèle. Par contre lorsque le nombre de Peclet augmente, le nombre d'onde critique augmente aussi et l'écoulement devient multicellulaire. Lorsque le nombre de Peclet est petit, le nombre de Rayleigh critique varie linéairement avec le nombre de Peclet.

Cette revue de littérature concerne principalement les travaux qui ont été réalisés sur la stabilité et la simulation numérique de la bioconvection gravitactique et gyrotactique. D'autres études consacrées aux modèles oxytactique et phototactique ne sont pas citées ici.

Parmi les études expérimentales de la bioconvection gravitactique nous pouvons citer celles de Noever (1991), Itoh et Toida (2001) et Mogami et al. (2004). Noever (1991) a étudié l'évolution de la bioconvection en fonction de la variation de gravité dans les suspensions de *Polytomella Parva* et *Tetrahymena Pyriformis*, les expériences de courte durée en microgravité et hypergravité ont été réalisées à bord d'avions en vol parabolique. Cet auteur a constaté la grande influence de la gravité sur les mouvements bioconvectifs. Itoh et Toida (2001) ont essayé de contrôler la bioconvection à travers un champ électrique en utilisant le protozoaire galvanotactique *Tetrahymena Thermophila*. Les résultats montrent la possibilité de contrôler la position de l'écoulement descendant de la bioconvection par l'utilisation d'une électrode négative installée en haut de la cavité. Comme exemple d'application mécanique de ce procédé, les auteurs ont réussi à faire tourner de façon continue une micro hélice en utilisant l'écoulement bioconvectif descendant. En utilisant un dispositif d'accélération centrifuge pour contrôler la gravité, Mogami et al. (2004) ont étudié la variation spatiale et temporelle des suspensions de *Tetrahymena Pyriformis* et *Tetrahymena Thermophila* en hypergravité. Ils ont constaté que les suspensions sont hautement sensibles à la gravité et que la longueur d'onde des cellules convectives diminue avec l'augmentation de la gravité.

Les travaux expérimentaux, analytiques et numériques sont présentés dans la revue de Pedley et Kessler (1992) dans l'Annual Review of Fluid Mechanics. Une deuxième revue réalisée par Hill et Pedley (2005) fait suite à la première et expose les travaux effectués depuis 1992 jusqu'au 2004.

### **1.3 Convection naturelle en présence d'un écoulement vertical**

La convection naturelle en présence d'un écoulement vertical traversant a suscité un grand intérêt par plusieurs auteurs étant donné la grande variété d'applications, comme dans le domaine de la récupération assistée du pétrole, la gazéification *in situ* du charbon et dans un grand nombre de situations pratiques en géologie, stockage d'eau chaude en aquifère et génie chimique. Ce phénomène est aussi très intéressant parce qu'il présente une grande similitude avec la bioconvection gravitactique. En effet, en comparant les équations gouvernant les deux problèmes nous remarquons la similarité entre l'équation de conservation de concentration pour la bioconvection et l'équation de conservation d'énergie pour la température.

L'effet de l'écoulement traversant le milieu poreux a été étudié en premier par Wooding (1960), il a analysé la stabilité d'une couche poreuse semi infinie soumise à un fort écoulement ascendant, la surface supérieure de la couche est imperméable et isotherme. Dans son étude il a supposé que le milieu poreux est isotrope et saturé par un fluide incompressible. L'état d'équilibre stationnaire est caractérisé par une distribution exponentielle de la température au-dessous de la surface supérieure. Cet auteur a montré que la couche est stable tant que le nombre de Rayleigh n'excède pas une certaine valeur critique positive, et que le nombre d'onde de la perturbation au seuil critique est fini.

Plus tard, Sutton (1970) a étudié le début de la convection pour des faibles écoulements ascendants dans un canal poreux dont les parois verticales sont thermiquement isolées et les parois horizontales sont maintenues à des températures constantes. Cet auteur a

utilisé deux méthodes pour déterminer le nombre de Rayleigh critique, la première est la méthode des séries de Taylor et la deuxième est la méthode numérique en utilisant les différences finies pour discrétiser les équations de convection, le système résultant est résolu ensuite par itération de Gauss Seidel. Les résultats dans cette étude sont présentés pour des nombre de Peclet très faible ( $0 \leq Pe \leq 0.08$ ) et pour plusieurs facteurs de forme ( $A=0.1, 0.15, 0.25$  et  $1$ ). Pour les nombres de Peclet supérieur à 0.08, la méthode numérique utilisée par l'auteur diverge.

Une extension de l'étude de Sutton (1970) a été menée par Homsy et Sherwood (1976) pour les nombres de Peclet plus grand. Ces auteurs ont utilisé la méthode de stabilité linéaire et la méthode d'énergie pour déterminer les limites de stabilité. Le modèle employé dans cette étude est un milieu poreux saturé chauffé uniformément par le bas avec une température constante. Le résultat principal de cette étude montre la dépendance du nombre de Rayleigh critique avec le nombre de Peclet, lorsque ce dernier augmente, le nombre de Rayleigh critique augmente aussi et l'écoulement traversant le milieu poreux a un effet stabilisateur de la convection. Les deux limites de stabilité données par les deux méthodes (stabilité linéaire et énergie) coïncident lorsque le nombre de Peclet est nul, par contre lorsque le nombre de Peclet augmente les deux limites diverge. Ainsi en dessous de la limite de la méthode d'énergie l'écoulement est toujours stable, par contre au dessus de la limite de la méthode de stabilité linéaire l'écoulement est toujours instable, et entre les deux limites l'écoulement peut être stable pour des petites perturbations mais instable pour des perturbations plus importantes en amplitude.

Une étude de la limite de stabilité d'une couche poreuse saturée limitée en haut et en bas par des parois soit poreuse ou imperméable a été présentée par Jones et Persichetti (1986). Les études de Wooding (1960), Sutton (1970), Homsy et Sherwood (1976) ont montré que l'écoulement traversant la couche poreuse a un effet stabilisateur. Jones et Persichetti (1986) ont montré qu'il existe un cas où l'écoulement traversant la couche



poreuse peut avoir un effet déstabilisateur lorsque la paroi supérieure est poreuse et la paroi inférieure est imperméable.

Nield (1987) a fournie une solution analytique pour expliquer le phénomène de déstabilisation trouvé par Jones et Persichetti (1986). Il a indiqué que l'écoulement traversant le milieu poreux diminue le gradient de température près de la frontière restrictive et augmente le gradient de température dans le reste du milieu. En conséquence, le maximum de la température perturbée se produit à un endroit où la vitesse verticale perturbée est la plus grande. Ceci mène à une augmentation d'énergie qui conduit à la déstabilisation. Chen (1990) confirmera par la suite numériquement les résultats analytiques de Nield (1987).

Dans toutes les études citées, les auteurs ont considéré le modèle de l'écoulement de Darcy. Shivakumara (1999) a étudié les effets des conditions aux limites et les effets d'inertie sur la convection dans une couche poreuse soumise à un écoulement vertical en utilisant le modèle de Brinkman, dans ce cas le problème devient plus complexe à cause de l'implication du nombre de Prandtl. Le nombre de Rayleigh critique a été obtenu pour plusieurs valeurs du nombre de Peclet et du nombre de Prandtl, pour les deux cas de condition aux limites isothermes et adiabatiques. Les solutions obtenues pour les conditions aux limites isothermes montrent un comportement similaire à celui observé dans le cas de frontières adiabatiques.

## **1.4 Thermo-bioconvection**

Les premières observations du phénomène de bioconvection ont poussé à croire que ce phénomène est dû au gradient de température présent dans la suspension, comme dans le cas de la convection de Bénard. Cependant, cette hypothèse a été écartée lorsqu'on a observé le phénomène même sous l'effet d'un gradient de température stabilisant (Plesset et Winet, 1974). La plupart des études concernant la bioconvection ont été effectuées jusqu'à présent pour le cas isotherme. Seulement quelques études analytiques

sur les effets thermiques ont été réalisées récemment. Dans ce cas il y a deux agents qui agissent sur la suspension, le gradient de concentration et le gradient thermique. Ces deux forces peuvent agir soit ensemble soit en opposition.

Kuznetsov (2005a) a étudié le début de la bioconvection dans une suspension de microorganismes gyrotactiques dans une couche fluide chauffée par le bas. Il suppose que le chauffage est suffisamment faible, pour ne pas tuer les microorganismes et ne pas affecter leur comportement gyrotactique. Dans cette étude le terme d'inertie dans les équations de Navier-Stokes est négligé vu les faibles vitesses d'écoulement du fluide engendrées par la bioconvection. Lorsque la surface supérieure est libre, les microorganismes tendent à se rassembler en dessous de la surface supérieure et forme une couche entassée, ce qui fait que la frontière supérieure ne peut pas être entièrement libre, la surface supérieure de la couche fluide est donc supposée rigide. Cet auteur a utilisé l'analyse de stabilité linéaire pour déterminer une corrélation entre le nombre de Rayleigh critique bioconvectif et les paramètres de contrôle du problème. Les résultats de cette étude révèlent que le chauffage par le bas rend le système plus instable et favorise le développement de la bioconvection.

L'étude de Kuznetsov (2005b) concerne aussi le début de la thermo-bioconvection, mais dans une suspension de microorganismes oxytactiques dans une couche fluide chauffée par le bas. L'effet du gradient de température sur la stabilité de la suspension a été étudié. En utilisant la méthode de stabilité linéaire une relation entre la valeur du nombre de Rayleigh critique de la bioconvection, et la valeur du nombre de Rayleigh critique de la convection thermique a été obtenue.

Une autre étude a été menée par Kuznetsov (2005c) sur la thermo-bioconvection dans une suspension de microorganismes oxytactiques. Une couche fluide peu profonde chauffée par le bas a été considérée, une analyse de stabilité de l'interaction entre la stratification de densité causée par la natation des microorganismes oxytactiques, et la

stratification provoquée par la variation de température dans le fluide chauffé par le bas a été réalisée. Une comparaison avec le cas d'une suspension isotherme montre que la suspension chauffée par le bas est moins stable que celle isotherme. Cet auteur prédit qu'une instabilité oscillatoire peut se produire dans le cas du chauffage par le bas.

Une étude complémentaire de celle de Kuznetsov (2005a) a été réalisée par Nield et Kuznetsov (2006). Le cas du refroidissement par le bas d'une couche fluide contenant une suspension de microorganismes gyrotactiques a été investigué. Dans ce cas, l'effet du gradient thermique stabilisant est opposé à l'effet de la bioconvection déstabilisant. L'étude présentée par ces auteurs est basée sur la théorie de la stabilité linéaire. Dans le cas d'un nombre de Peclet non nul, l'étude montre que le mode oscillatoire de la convection est possible. Le changement du mode stationnaire en mode oscillatoire s'accompagne d'un saut à un nombre d'onde plus petit. L'étude a montré aussi que le nombre de Rayleigh critique de bioconvection diminue rapidement avec le nombre gyrotactique et diminue moins rapidement avec l'augmentation du nombre de Peclet.

## CHAPITRE II

### FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

#### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons la formulation mathématique de notre problème. Trois principaux cas sont traités. Le premier cas concerne la bioconvection gravitactique en milieu fluide, dans le deuxième cas nous traitons la convection en présence d'un écoulement vertical, tandis que dans le troisième cas nous considérons la thermo-bioconvection en milieu fluide. Les méthodes numériques de résolution du problème seront présentées à la fin de ce chapitre.

#### 2.2 Bioconvection gravitactique en milieu fluide

Dans cette section, nous considérons les coordonnées cartésiennes, la formulation dans les coordonnées cylindriques est présentée dans l'Annexe A.

Pour une formulation simple du modèle mathématique, nous utilisons le modèle continu développé par Childress et al. (1975) qui s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- Les microorganismes nagent dans une direction verticale avec une vitesse moyenne  $V_c$ .
- Le taux de naissance et de mortalité des cellules est négligé (le temps pour les deux processus est supposé beaucoup plus grand que le temps pour la convection de l'écoulement).
- Le problème est supposé bidimensionnel.

- Le fluide contenant les microorganismes est newtonien et incompressible.
- L'écoulement engendré est laminaire.
- Les propriétés de la suspension fluide sont constantes, excepté la densité du fluide, qui est supposée varier linéairement avec la concentration des microorganismes dans l'enceinte suivant l'approximation de Boussinesq.

### 2.2.1 Équations gouvernantes

Les équations de base régissant l'écoulement et le transfert de masse dans le modèle de Childress et al. (1975) sont : l'équation de conservation de masse, l'équation de conservation de quantité de mouvement et l'équation de conservation de cellules.

Le principe de la conservation de masse conduit à l'équation de continuité pour un fluide incompressible

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (2.1)$$

dans laquelle  $\vec{u}'$  est la vitesse moyenne d'un élément de volume de la suspension.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{D\vec{u}'}{Dt'} = -\nabla p' + \mu \nabla^2 \vec{u}' + \rho g \vec{k} \quad (2.2)$$

avec  $p'$  la pression,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide,  $g$  l'accélération gravitationnelle et  $\vec{k}$  le vecteur unitaire suivant la direction verticale.

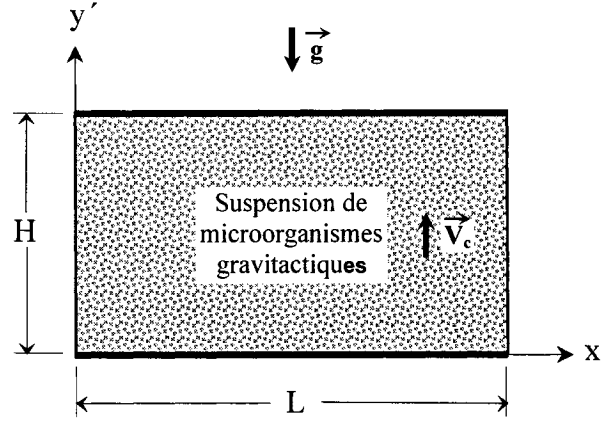


Figure 2.1 : Schéma général de la cavité rectangulaire

L'équation de conservation de cellules s'écrit:

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} = -\nabla \cdot \vec{J}' \quad (2.3)$$

$\vec{J}'$  représente le flux des cellules. Il est dû d'une part au mouvement aléatoire représenté par la diffusion, et d'autre part au mouvement de natation gravitactique et l'advection par l'écoulement du fluide.

En conséquence

$$\vec{J}' = (\vec{u}' + \vec{V}_c')n' - D_c \nabla n' \quad (2.4)$$

$\vec{V}_c = V_c \vec{k}$  est la vitesse moyenne de natation des microorganismes et  $D_c$  est le coefficient de diffusion des cellules.

L'approximation de Boussinesq suppose que toutes les propriétés physiques sont constantes sauf la densité dans le terme des forces de flottabilité qui peut être exprimée par une fonction linéaire de la concentration.

L'approximation de Boussinesq s'écrit dans ce cas :

$$\rho = \rho_w + (\rho_c - \rho_w)n'\vartheta = \rho_w(1 + \vartheta \frac{\Delta\rho}{\rho_w} n') \quad (2.5)$$

$\rho$  est la densité moyenne de la suspension,  $n'$  la concentration des cellules,  $\vartheta$  le volume d'une cellule et  $\Delta\rho = \rho_c - \rho_w$  la différence entre la densité de la cellule et la densité de l'eau.

L'équation de quantité de mouvement sous l'hypothèse de Boussinesq implique :

$$\rho \frac{D\vec{u}'}{Dt'} = -\nabla p' + \mu \nabla^2 \vec{u}' + n' \vartheta \Delta\rho g \vec{k} \quad (2.6)$$

Les conditions aux limites hydrodynamiques expriment l'imperméabilité et l'adhérence des particules fluides sur les parois rigides de la cavité. Elles s'écrivent comme suit :

$$\vec{u}' = 0 \quad (2.7)$$

Les conditions massiques aux frontières s'expriment par un flux de masse nul à travers les parois imperméables.

$$\vec{J}' \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.8)$$

$\vec{n}$  est le vecteur unitaire normale à la paroi.

Au temps initial ( $t' = 0$ ), le fluide est au repos et la concentration à l'intérieur de la cavité est uniforme

$$\vec{u}' = 0, n' = \bar{n} \quad (2.9)$$

### 2.2.2 Formulation vorticité fonction de courant

En utilisant la formulation en terme de vorticité et de fonction de courant les équations (2.1) et (2.6) deviennent :

$$\omega' = -\nabla^2 \psi' \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} + u' \frac{\partial \omega'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \omega'}{\partial y'} = \nu \nabla^2 \omega' + g \vartheta \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{\partial n'}{\partial x'} \quad (2.11)$$

avec  $u' = \partial \psi' / \partial y'$ ,  $v' = -\partial \psi' / \partial x'$

### 2.2.3 Équations adimensionnelles

Les équations décrivant le problème sont rendues adimensionnelles en utilisant les échelles suivantes :

$H$  facteur d'échelle pour la longueur (hauteur de la cavité).

$\frac{H^2}{D_c}$  facteur d'échelle pour le temps.

$\bar{n}$  facteur d'échelle pour la concentration.

Nous obtenons alors les équations sous forme adimensionnelle :

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = Sc \nabla^2 \omega - ScRa \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} \quad (2.14)$$

où le flux cellulaire est :

$$\vec{J} = (\bar{u} + Pe \vec{k})n - \nabla n \quad (2.15)$$



$Sc = \nu / D_c$  est le nombre de Schmidt, il représente le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement et la diffusivité de matière et caractérise l'importance relative de ces deux mécanismes qui freinent la convection du fluide.

$Pe = V_c H / D_c$  est le nombre de Peclet (ou vitesse de natation adimensionnelle), c'est une mesure de l'importance relative de l'advection des microorganismes par rapport à leurs diffusion dans la suspension.

$Ra$  est le nombre de Rayleigh de bioconvection défini par  $Ra = g \bar{n} v \Delta \rho H^3 / \mu D_c$ , il exprime le rapport entre les effets de la force d'Archimède, et les effets de la viscosité et de diffusion de masse.

Les conditions aux frontières adimensionnées s'expriment donc pour la cavité rectangulaire comme suit :

$$y = 0, 1 : \quad \psi = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.16)$$

$$x = 0, A : \quad \psi = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.17)$$

avec  $A = L / H$  est le rapport de forme de la cavité.

### **2.3 Convection en présence d'un écoulement vertical**

Pour l'étude de la convection naturelle dans un milieu poreux avec la présence d'un écoulement vertical nous considérons les hypothèses suivantes :

- Le problème est supposé bidimensionnel.
- Le milieu poreux est solide, perméable et isotrope.
- Le fluide saturant le milieu poreux est newtonien et incompressible.
- L'écoulement convectif dans le milieu poreux est laminaire. Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est supposé négligeable.

- Les propriétés thermodynamiques du fluide, excepté la densité, sont constantes et évaluées à des températures de référence. La densité du fluide est supposée varier linéairement avec la température du fluide dans l'enceinte suivant l'approximation de Boussinesq.

### 2.3.1 Équations gouvernantes

Les équations gouvernant la convection naturelle dans un milieu poreux 2D sont :

L'équation de continuité :

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (2.18)$$

L'équation de Darcy-Boussinesq :

$$0 = -\nabla p' - \frac{\mu}{K} \vec{u}' + \rho_0 [1 - \beta(T' - T_0)] \vec{g} \quad (2.19)$$

L'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + \nabla \cdot (\vec{u}' T' - \alpha_t \nabla T') = 0 \quad (2.20)$$

Les conditions aux limites hydrodynamiques sont :

$$\begin{cases} x' = 0, L : & \vec{u}' = 0 \\ y' = 0, H : & \vec{u}' = V_0 \vec{k} \end{cases} \quad (2.21)$$

$V_0$  est la vitesse de l'écoulement ascendant traversant le milieu poreux.

Les conditions aux limites thermiques pour ce problème sont :

$$\begin{cases} x' = 0, L : & \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0 \\ y' = 0 : & T' = T_0 + \Delta T \\ y' = H : & T' = T_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

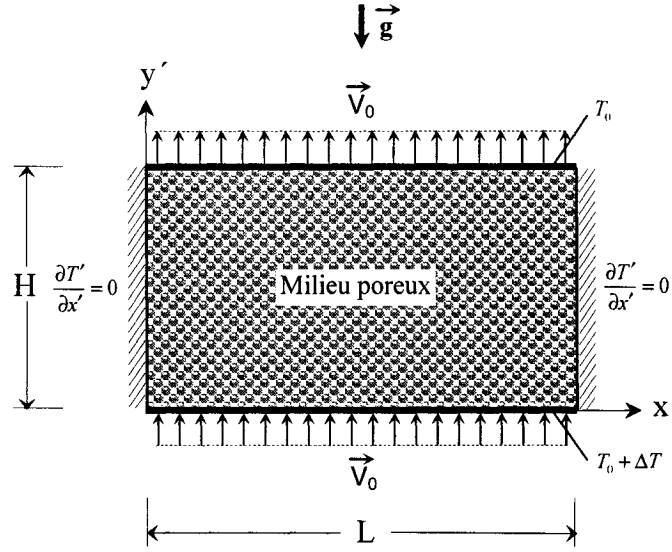


Figure 2.2 : Schéma général de la cavité poreuse

Les équations (2.18), (2.19) et (2.20) sous les conditions aux limites (2.21) et (2.22) admettent une solution de base comme suit :

$$v'_B = V_0 \quad (2.23)$$

$$T'_B = T_0 + \Delta T - \Delta T \left[ \frac{\exp(V_0 y' / \alpha_t) - 1}{\exp(V_0 H / \alpha_t) - 1} \right] \quad (2.24)$$

### 2.3.2 Formulation fonction de courant

En terme de fonction de courant les équations (2.18), (2.19) et (2.20) deviennent :

$$\nabla^2 \psi' = -\rho_0 \frac{K\beta g}{\mu} \frac{\partial T'}{\partial x'} \quad (2.25)$$

$$\frac{DT'}{Dt'} = \alpha_t \nabla^2 T' \quad (2.26)$$

### 2.3.3 Équations adimensionnelles

Pour rendre les équations gouvernantes adimensionnelles, les variables adimensionnelles suivantes sont utilisées :

$$t = \frac{\alpha}{H^2} t', x = \frac{x'}{H}, y = \frac{y'}{H}, T = \frac{T' - T_0}{\Delta T} \text{ et } \bar{u} = \frac{H}{\alpha_i} \bar{u}'$$

Les équations (2.25) et (2.26) deviennent après adimensionnalisation :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = -Ra_p \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{DT}{Dt} = \nabla^2 T \end{cases} \quad (2.27)$$

$Ra$  est le nombre de Rayleigh thermique du milieu poreux défini par

$$Ra_p = \frac{g K \beta \Delta T H}{\alpha_i \nu}$$

Les conditions aux limites hydrodynamiques adimensionnées sont :

$$\begin{cases} x = 0: & \psi = 0 \\ x = A: & \psi = Pe_i A \\ y = 0, 1: & \psi = Pe_i x \end{cases} \quad (2.28)$$

$Pe_i = \frac{V_0 H}{\alpha_i}$  est le nombre de Peclet de l'écoulement ascendant dans le milieu poreux.

Les conditions aux limites thermiques adimensionnées sont :

$$\begin{cases} x = 0, A: & \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ y = 0: & T = 1 \\ y = 1: & T = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

## 2.4 Thermo-bioconvection gravitactique en milieu fluide

Pour l'étude de la thermo-bioconvection dans un milieu fluide nous considérons les hypothèses énoncées dans la section 2.1 en plus des hypothèses suivantes:

- La direction de natation des microorganismes n'est pas affectée par le transfert de chaleur dans le milieu.
- Le chauffage ou le refroidissement de la suspension est suffisamment faible, pour ne pas tuer les microorganismes et ne pas affecter leur comportement.
- Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est supposé négligeable.

### 2.4.1 Équations gouvernantes

Les équations gouvernant la thermo-bioconvection dans un milieu fluide sont :

L'équation de conservation de masse :

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (2.30)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement sous l'approximation de Boussinesq:

$$\rho_w \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + \rho_w \nabla \cdot (\vec{u}' \vec{u}') = -\nabla p' + \mu \nabla^2 \vec{u}' + \vartheta \Delta \rho n' \vec{g} - \rho_w \beta (T' - T_0) \vec{g} \quad (2.32)$$

avec  $p'$  la pression,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide et  $\vec{g}$  l'accélération gravitationnelle.

L'équation de conservation de cellules:

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} = -\nabla \cdot \vec{J}' \quad (2.33)$$

avec

$$\vec{J}' = (\vec{u}' + \vec{V}_c')n' - D_c \nabla n' \quad (2.34)$$

$D_c$  est le coefficient de diffusion des cellules et  $\vec{V}_c = V_c \vec{k}$  est la vitesse moyenne de natation des microorganismes.

L'équation de conservation d'énergie:

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + \nabla \cdot (\vec{u}' T') = \alpha \nabla^2 T' \quad (2.35)$$

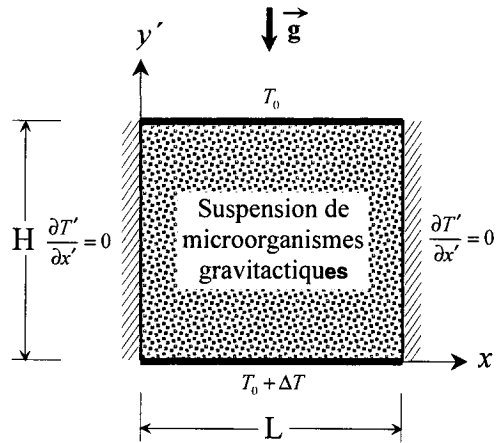


Figure 2.3 : Schéma du modèle physique et les conditions aux limites thermiques

Pour les parois rigides et imperméables nous avons :

$$\vec{u}' = 0 \quad (2.36)$$

Le flux de masse est nul à travers les parois et s'exprime par :

$$\vec{J}' \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.37)$$

où  $\bar{n}$  est le vecteur unitaire normale à la paroi.

Les conditions aux limites thermiques sont :

$$\text{Sur les parois verticales :} \quad \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0 \quad (2.38)$$

$$\text{Sur la paroi horizontale inférieure :} \quad T' = T_0 + \Delta T \quad (2.39)$$

$$\text{Sur la paroi horizontale supérieure :} \quad T' = T_0 \quad (2.40)$$

## 2.4.2 Équations adimensionnelles sous la formulation vorticité fonction de courant

Les équations (2.30)-(2.35) sont rendues adimensionnelles en utilisant la hauteur  $H$  comme échelle de longueur,  $D_c / H$  comme échelle de vitesse,  $\bar{n}$  comme échelle de concentration et  $\Delta T$  comme échelle de température. En utilisant la formulation vorticité fonction de courant nous déduisons le système d'équations couplées suivant :

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = Sc \nabla^2 \omega + Sc \left( Ra \frac{\partial n}{\partial x} - Ra_T Le \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + u \frac{\partial n}{\partial x} + (v + Pe) \frac{\partial n}{\partial y} = \nabla^2 n \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = Le \nabla^2 T \quad (2.44)$$

où  $Sc$ ,  $Pe$  et  $Ra$  sont respectivement le nombre de Schmidt, le nombre de Peclet et le nombre de Rayleigh de bioconvection définies dans la section 2.1.3.

$Ra_T = g\beta\Delta TH^3 / \nu\alpha_l$  est le nombre de Rayleigh thermique et  $Le = \alpha_l / D_c$  le nombre de Lewis.

Les conditions aux limites hydrodynamiques et massiques adimensionnées sont :

$$\psi = 0, \vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{à } x = 0, A \text{ et } y = 0, 1 \quad (2.45)$$

Les conditions aux limites thermiques adimensionnées sont :

$$\begin{cases} x = 0, A: & \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ y = 0: & T = 1 \\ y = 1: & T = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

## 2.5 Étude de la stabilité linéaire

### 2.5.1 Convection naturelle en présence d'un écoulement vertical

Pour déterminer le nombre de Rayleigh critique nous utilisons à la méthode de stabilité linéaire qui consiste à introduire une petite perturbation à l'écoulement de base, puis à examiner son évolution dans le temps.

Le système d'équation (2.27) sous les conditions aux limites (2.28) et (2.29) admet la solution de base suivante:

$$v_B = Pe_t \quad (2.47)$$

$$\Psi_B = -Pe_t x \quad (2.48)$$

$$T_B = 1 - \left[ \frac{\exp(Pe_t y) - 1}{\exp(Pe_t) - 1} \right] \quad (2.49)$$



Cet état de base est perturbé en introduisant une perturbation comme suit :

$$(u, v) = (\tilde{u}, Pe_t + \tilde{v}) \quad (2.50)$$

$$\Psi = \Psi_B + \tilde{\Psi} \quad (2.51)$$

$$T = T_B + \tilde{T} \quad (2.52)$$

En substituant ces perturbations (2.50)-(2.52) dans le système d'équations (2.27) nous obtenons :

$$\nabla^2 \tilde{\Psi} = -Ra_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + (\tilde{v} + Pe_t) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} - \nabla^2 \tilde{T} = -\tilde{v} F \quad (2.54)$$

où  $F$  est le gradient adimensionnel de la température de l'état de base donné par

$$F = \frac{\partial T_B}{\partial y} = -Pe_t \frac{\exp(Pe_t y)}{\exp(Pe_t) - 1} \quad (2.55)$$

Les fonctions  $\tilde{\Psi}$  et  $\tilde{T}$  peuvent être exprimées comme suit :

$$\tilde{\Psi}(t, x, y) = \exp(pt + i\alpha x) \phi(y) \quad (2.56)$$

$$\tilde{T}(t, x, y) = \exp(pt + i\alpha x) \theta(y) \quad (2.57)$$

$p$  est le taux de d'amplification et  $\alpha$  est le nombre d'onde des perturbations dans la direction horizontale.

En introduisant  $\tilde{\Psi}$  et  $\tilde{T}$  dans les équations (2.53), (2.54) et en négligeant les termes non linéaires, nous obtenons le système d'équations linéaire suivant :

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \alpha^2 \phi = -i\alpha Ra_p \theta \quad (2.58)$$

$$-\frac{d^2\theta}{dy^2} + Pe_i \frac{d\theta}{dy} + (p + \alpha^2)\theta = i\alpha F\phi \quad (2.59)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$y = 0, 1 : \quad \phi = 0 \quad (2.60)$$

$$y = 0, 1 : \quad \theta = 0 \quad (2.61)$$

Pour déterminer le seuil critique du début de la convection, le système d'équations linéaires (2.58) et (2.59) est discrétisé en utilisant la méthode des différences finies, le problème de valeur propre résultant est ensuite résolu numériquement.

### 2.5.2 Thermo-bionvection dans une couche fluide

Lorsque le fluide est au repos ( $u = v = \psi = \omega = 0$ ), les équations (2.41)-(2.44) gouvernant la thermo-bioconvection dans une couche fluide se réduisent à :

$$Pe \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.63)$$

Sous les conditions aux limites (2.45) et (2.46), ces équations admettent une solution de base exprimé par :

$$n_b = \frac{\exp(Pe y) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (2.64)$$

$$T_b = 1 - y \quad (2.65)$$

Pour déterminer le début de la convection, la théorie de stabilité linéaire est utilisée en introduisant des perturbations sur l'état de base comme suit:

$$(u, v, \psi, \omega) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}) \quad (2.66)$$

$$n = n_b + \tilde{n} \quad (2.67)$$

$$T = T_B + \tilde{T} \quad (2.68)$$

En substituant ces perturbations dans les équations (2.41)-(2.44) et en négligeant les termes non linéaires nous obtenons:

$$\tilde{\omega} = -\nabla^2 \tilde{\psi} \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = Sc \nabla^2 \tilde{\omega} + Sc \left( Ra \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} - Ra_T Le \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right) \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{dn_B}{dy} + Pe \frac{\partial \tilde{n}}{\partial y} = \nabla^2 \tilde{n} \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{dT_B}{dy} = Le \nabla^2 \tilde{T} \quad (2.72)$$

Les fonctions  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{T}$  sont exprimées comme suit :

$$\tilde{\omega}(t, x, y) = \exp(pt + i\alpha x) \Omega(y) \quad (2.73)$$

$$\tilde{\psi}(t, x, y) = \exp(pt + i\alpha x) \phi(y) \quad (2.74)$$

$$\tilde{n}(t, x, y) = \exp(pt + i\alpha x) \eta(y) \quad (2.75)$$

$$\tilde{T}(t, x, y) = \exp(pt + i\alpha x) \theta(y) \quad (2.76)$$

En remplaçant  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{n}$  et  $\tilde{T}$  par leurs valeurs dans les équations (2.69)- (2.72) nous obtenons:

$$\Omega = -\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) \phi \quad (2.77)$$

$$\sigma \Omega = Sc \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) \Omega + i\alpha Sc (Ra \eta - Ra_T Le \theta) \quad (2.78)$$

$$\sigma \eta - i\alpha \frac{dn_B}{dy} \phi + Pe \frac{d\eta}{dy} = \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) \eta \quad (2.79)$$

$$\sigma \theta - i\alpha \frac{dT_B}{dy} \phi = Le \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) \theta \quad (2.80)$$

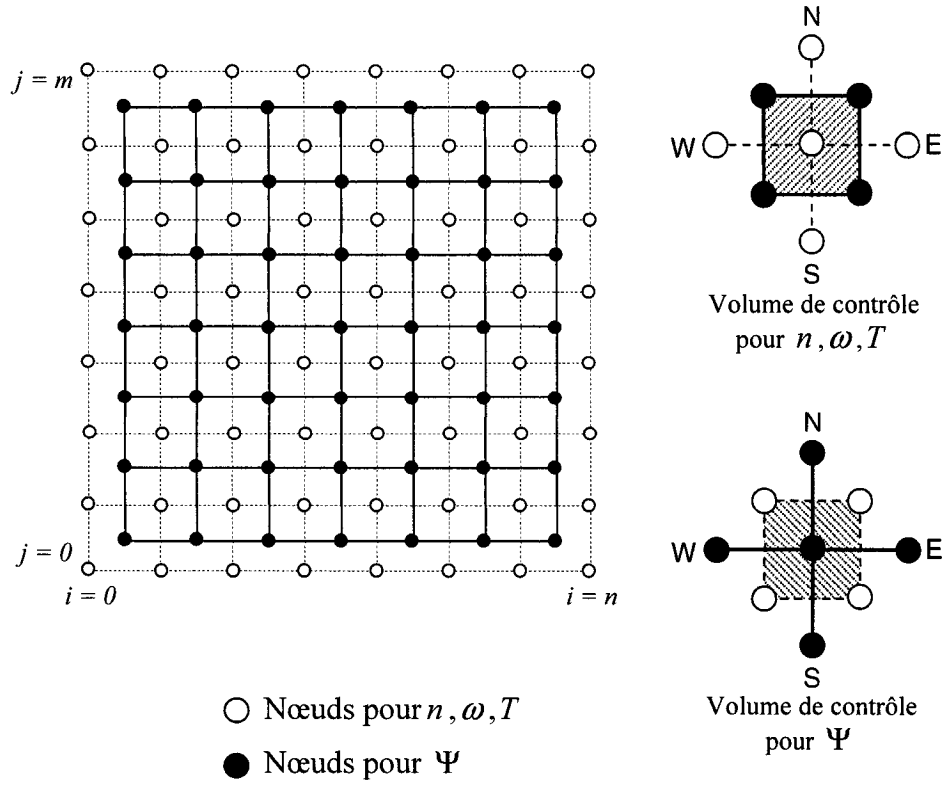
Les conditions aux limites deviennent:

$$y = 0,1 : \quad \phi = 0, \quad \frac{d\phi}{dy} = 0, \quad \eta Pe = \frac{d\eta}{dy}, \quad \theta = 0 \quad (2.81)$$

Les équations linéaires (2.77)-(2.80) avec les conditions aux limites (2.81) sont discrétisées en utilisant la méthode des différences finies, et de la même manière que pour le cas du milieu poreux le problème est mis sous forme d'un problème de valeurs propres et résolu numériquement.

## **2.6 Méthode de solution numérique**

La méthode de solution est basée sur le concept des volumes de contrôle (Patankar, 1980), un maillage uniforme décalé a été utilisé pour obtenir la solution numérique (figure 2.4). Les équations discrétisées ont été dérivées en intégrant d'abord dans chaque volume de contrôle et ensuite en utilisant les différences centrées pour calculer le flux et les différences avant pour la discrétisation dans le temps.



**Figure 2.4** : Maillage et distribution des nœuds sur le volume de contrôle.

### 2.6.1 Discrétisation des équations

Les dérivées spatiales sont approximées par des différences finies centrées d'ordre deux.

À un nœud  $(i,j)$  la dérivée par rapport à  $x$  est donnée par :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (2.82)$$

où  $f$  désigne :  $\omega, \psi, n$  ou  $T$

La dérivée dans le temps est approximée par une discrétisation implicite du premier ordre, c'est-à-dire :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (2.83)$$

La résolution des équations discrétisées est basée sur la technique ADI (méthode implicite aux directions alternées) à chaque pas de temps. Cette méthode divise un pas de temps en deux : dans le premier demi pas, le système est résolu implicitement dans la direction  $r$  et explicitement dans la direction  $z$ . Dans le second demi pas, la procédure est inversée. La distribution des noeuds sur les volumes de contrôle est montrée à la figure 2.4.

### 2.6.2 Procédure de calcul

Pour chaque pas de temps, la procédure de calcul suivante est utilisée pour calculer les champs de vitesse et de concentration:

1. Initialisation des champs de température, de concentration, de vorticité et de fonction de courant ou utilisation de la solution au temps précédent.
2. Calcul de  $u$  et  $v$  à partir de la fonction de courant.
3. Calcul de la vorticité utilisant  $T$ ,  $N$ ,  $u$ ,  $v$  et l'équation de vorticité.
4. Calcul de la fonction de courant grâce à la vorticité et à l'équation de fonction de courant.
5. Calcul du champ de concentration et température.
6. Répéter jusqu'à obtenir la convergence.

Nous considérons cette convergence atteinte lorsque la condition de convergence, appliquée pour chaque quantité et à tous les points du maillage, obtenu à l'étape 5 est suffisamment petite pour que son calcul n'introduise pas de changement appréciable, c'est-à-dire lorsque

$$\varepsilon = \frac{|f^{k+1} - f^k|}{\max |f^k|} \leq 10^{-6} \quad (2.84)$$

## CHAPITRE III

### BIOCONVECTION GRAVITACTIQUE DANS UN CYLINDRE VERTICAL

#### **3.1 Introduction**

Nous considérons dans ce chapitre le problème de la bioconvection gravitactique dans un cylindre vertical. Les équations régissant le phénomène ainsi que les conditions aux limites et les conditions initiales sont exposées au chapitre 2, et la formulation en coordonnées cylindrique est présentée dans l'Annexe A. Cette configuration du cylindre vertical peut être trouvée dans plusieurs domaines, par exemple un bioréacteur, ou un tube de laboratoire. L'étude de cette configuration nous permet aussi d'avoir une idée sur le comportement tridimensionnel de la bioconvection, puisque la formulation axisymétrique est une forme simplifiée d'une formulation 3D. En effet, dans le cas de la bioconvection gyrotactique, Ghorai et Hill (2002) ont comparé les résultats de la simulation 2D et dans une cavité cylindrique axisymétrique avec les résultats expérimentaux. Ils ont constaté que pour les paramètres considérés, les résultats de la bioconvection axisymétrique sont plus réalistes que ceux de la bioconvection 2D en terme de période de temps d'oscillations.

D'après la revue de littérature présentée dans la section 1.2 du chapitre 1 qui concerne la bioconvection en milieu fluide, nous constatons que le cas de la géométrie cylindrique n'a jamais été considéré dans le cas de la bioconvection gravitactique. L'objectif principal de la présente étude est donc l'étude de la stabilité d'une suspension de microorganismes gravitactiques contenue dans un cylindre vertical en fonction des différents paramètres de contrôle du problème, notamment le nombre de Peclet et le



rapport de forme du cylindre. La méthode utilisée pour résoudre le problème de stabilité est basée sur le concept des volumes de contrôle. Cette étude a fait l'objet d'un article publié par Alloui et al. (2005).

### 3.2 État de diffusion

Les équations (A.6)-(A.8) sous les conditions aux limites (A.10)-(A.12) admettent une solution d'équilibre ( $\psi = \omega = 0$ ) avec un profil de concentration exponentiel de la forme :

$$n_d = Pe \frac{e^{PeZ}}{e^{Pe} - 1} \quad (3.1)$$

C'est l'état de diffusion dans lequel il y a un équilibre entre le flux convectif résultant de la natation des microorganismes et le flux résultant de la diffusion de concentration de la population des cellules. Il est caractérisé par la formation d'une couche dense de microorganismes dans la partie supérieure du fluide, cette couche est plus dense que le fluide qui se situe en dessous de celle-ci, cette situation est stable jusqu'à une certaine valeur de la concentration moyenne des microorganismes, en d'autre terme jusqu'à une certaine valeur du nombre de Rayleigh critique. Lorsque la valeur du nombre de Rayleigh devient supérieure à la valeur critique, la situation devient instable et il y a apparition de l'état convectif.

La figure 3.1 montre l'état de diffusion et l'état initial homogène (avant l'état de diffusion) obtenu expérimentalement dans une suspension du protozoaire *Tetrahymena* contenue dans une cavité carrée de 100mm de côté et 1mm d'épaisseur (Nguyen-Quang et Alloui, 2005). Les expériences ont été effectuées au laboratoire de microbiologie et de contrôle des infections de l'Université de Montréal. Dans ce cas, l'état de diffusion est stable, c'est-à-dire que la concentration moyenne est en dessous de la concentration critique l'apparition de la bioconvection.

À l'état initial montré sur la figure 3.1, nous voyons clairement que les microorganismes sont répartis de façon homogène dans notre cavité. Cependant, après un certain temps l'état de diffusion stationnaire apparaît dans notre cavité, dans ce cas les microorganismes se concentrent en haut de la cavité et la distribution de la concentration dans la direction verticale est de forme exponentielle.

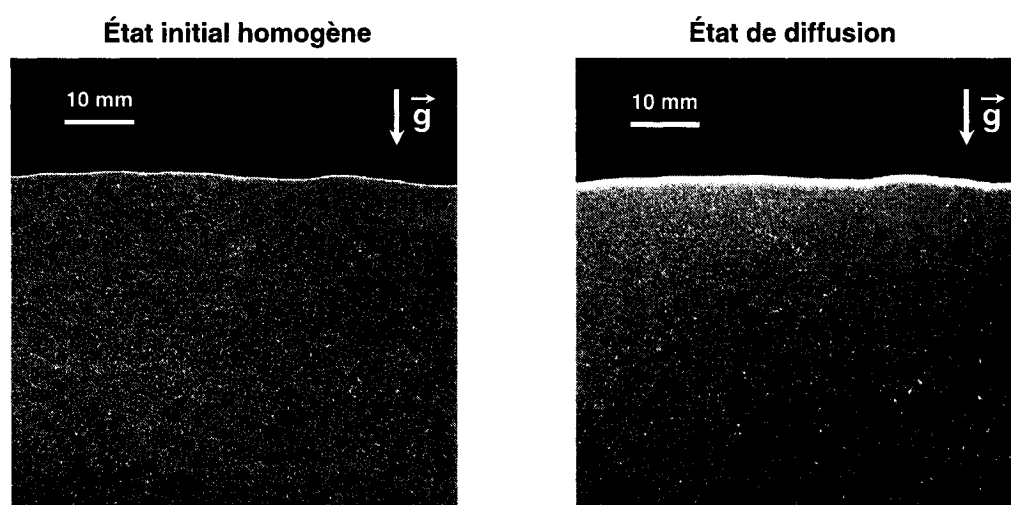


Figure 3.1 : Etat initial de concentration homogène (à gauche) et état final de diffusion exponentiel (à droite) dans une suspension de *Tetrahymena Pyriformis* contenue dans une cavité carrée de 100mm de coté et 1mm d'épaisseur (Nguyen-Quang et Alloui, 2005).

Sur la figure 3.2 nous avons simulé l'évolution temporelle de l'état initial homogène à l'état de diffusion exponentiel pour un cylindre vertical avec un rapport de forme  $A_c = 1$ , un nombre de Peclet  $Pe = 10$  et une concentration moyenne  $\bar{n} = 1$ . À l'état initial ( $t = 0$ ), la concentration des microorganismes est répartie de façon homogène dans toute la cavité. Les microorganismes nagent ensuite verticalement ce qui se traduit par une

augmentation du gradient de concentration en haut de la cavité et une diminution de ce dernier en bas de la cavité. Lorsque l'équilibre entre le flux convectif résultant de la natation des microorganismes et le flux résultant de la diffusion de concentration est atteint, la solution converge vers un état de diffusion exponentiel stationnaire  $n = n_d(z)$ .

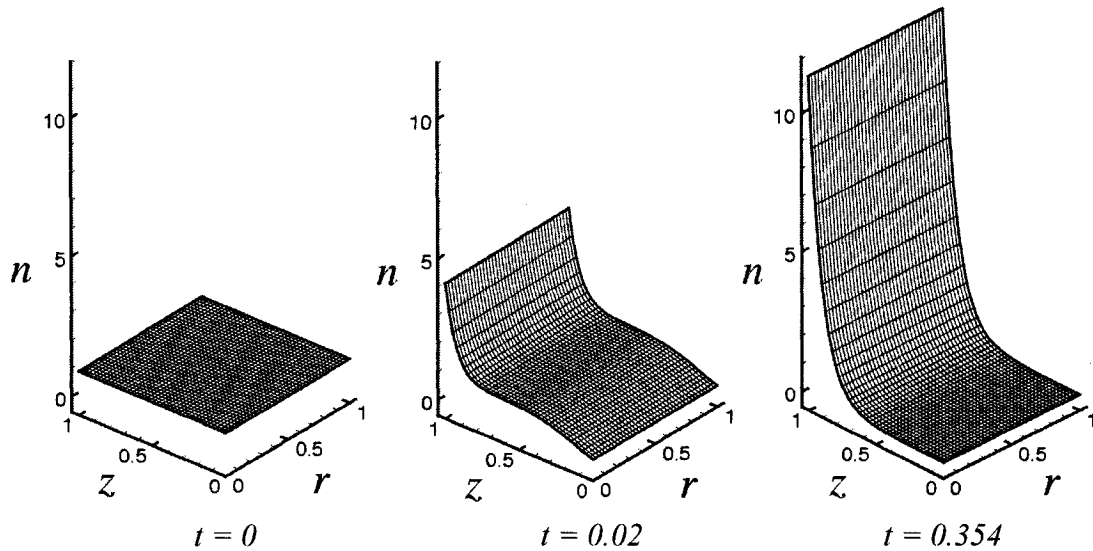


Figure 3.2 : Évolution temporelle de la concentration à l'intérieur d'un cylindre vertical avec  $A_c = 1$  et  $Pe = 10$ .

### 3.3 Validation du code numérique

Pour valider notre code numérique, nous avons simulé l'état de diffusion pour différents nombres de Peclet et nous avons comparé les résultats obtenus avec la solution analytique de l'état de diffusion (3.1). La figure 3.3 montre une très bonne concordance entre les profils numérique et analytique pour  $Pe=0.1$ , 1 et 10. D'après cette figure nous constatons que pour  $Pe=10$  (figure 3.3c), le profil est hautement exponentiel et le gradient est très fort en haut de la cavité, par contre pour  $Pe=0.1$  (figure 3.3a) le profil est presque linéaire.

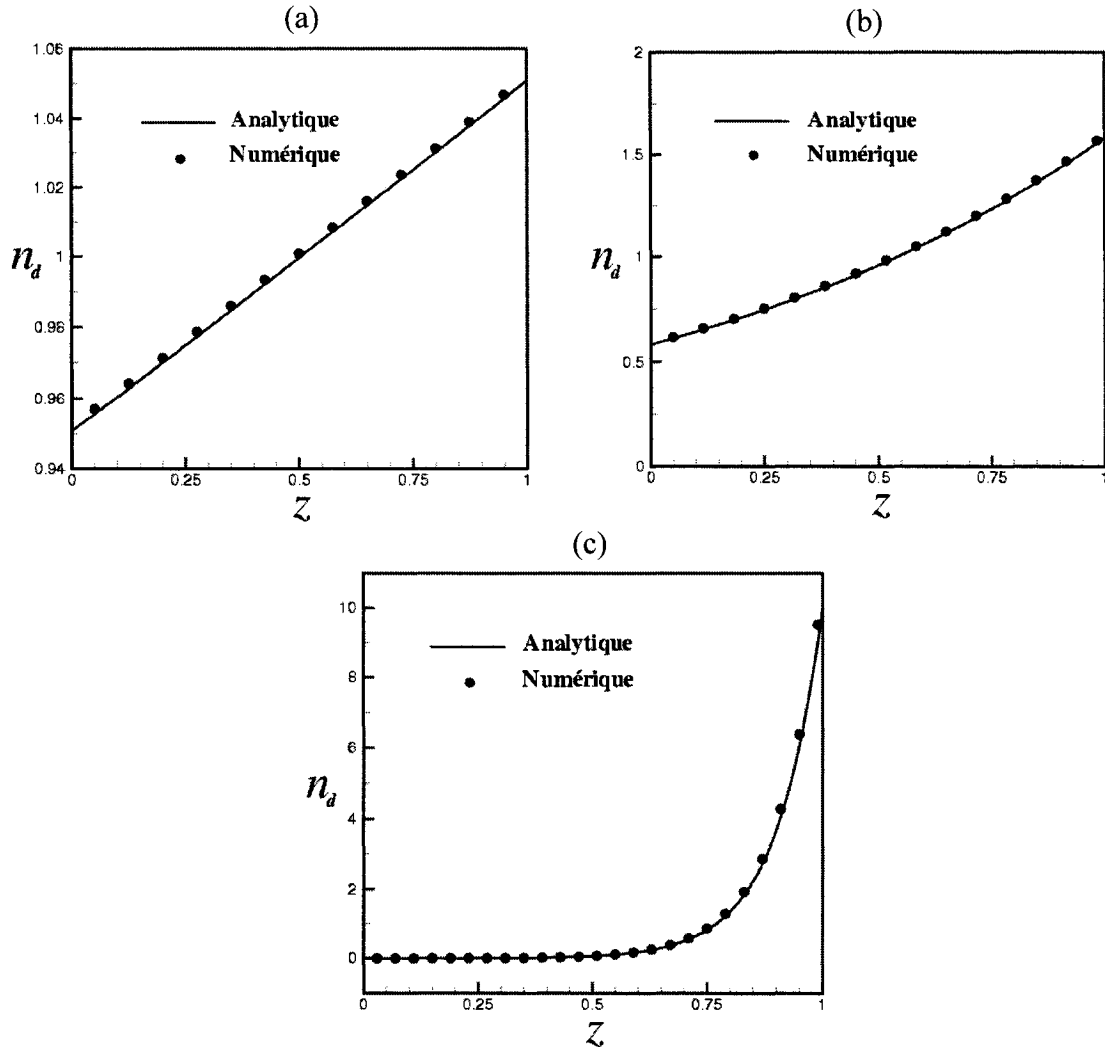


Figure 3.3 : Comparaison entre la solution numérique et la solution analytique de diffusion pour : (a)  $Pe = 0.1$ , (b)  $Pe = 1$ , (c)  $Pe = 10$

### 3.4 Résultats et discussion

Les résultats numériques présentés dans cette section sont obtenus pour un nombre de Schmidt  $Sc = 1$ , un maillage uniforme  $\Delta r = \Delta z = 0.01$ , un pas de temps  $\Delta t = 0.005$  et une concentration initiale  $\bar{n} = 1$ . Il faut noter ici que dans le cas de la bioconvection

axisymétrique il n'y a aucune étude qui a été faite dans le modèle gravitactique, il y a seulement l'étude de Ghorai et Hill (2002) qui considère le modèle gyrotactique.

Les figures 3.4, 3.5 et 3.6 montrent les diagrammes de bifurcation pour un cylindre de facteur de forme  $A_c=1$  et pour les nombres de Peclet  $Pe=0.1$ ,  $Pe=1$  et  $Pe=10$  respectivement. La variation de la fonction de courant maximal en fonction du nombre de Rayleigh est représentée. Ces diagrammes sont obtenus d'une part en commençant la simulation par l'état de diffusion en tant qu'état initial. Nous augmentons après graduellement le nombre de Rayleigh jusqu'à ce que la convection surgisse. Nous continuons ensuite à obtenir des solutions à des nombres de Rayleigh plus élevés avec comme état initial la solution du Rayleigh précédent. D'autre part une fois la solution au nombre de Rayleigh le plus élevé est obtenue, nous prenons cette solution comme état initial et nous procédons ensuite dans le chemin inverse pour obtenir des solutions aux nombres inférieurs de Rayleigh. Le diagramme de bifurcation illustré sur la figure 3.4 montre la variation de l'intensité de l'écoulement en fonction du nombre de Rayleigh pour un rapport de forme  $A_c=1$  et un nombre de Peclet  $Pe=0.1$ . Le graphique indique que la courbe est de la forme supercritique et que la convection surgie à la même valeur du nombre de Rayleigh où elle disparaît.

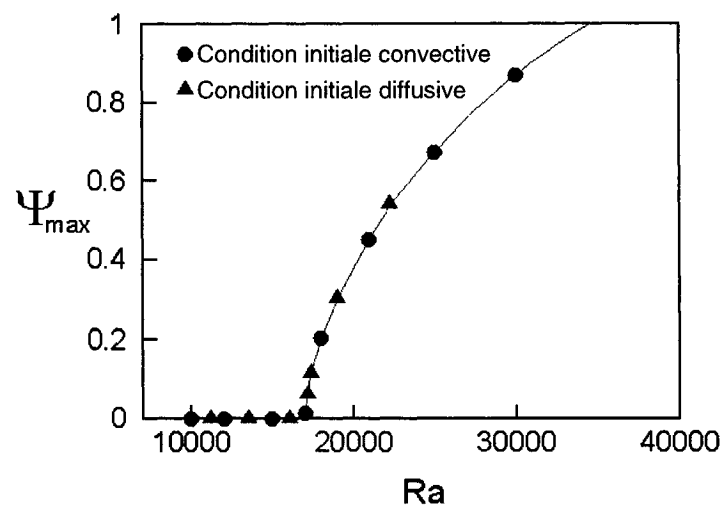


Figure 3.4 : Diagramme de bifurcation : variation de  $\Psi_{\max}$  en fonction de  $Ra$  pour  $A_c = 1$   
et  $Pe = 0.1$

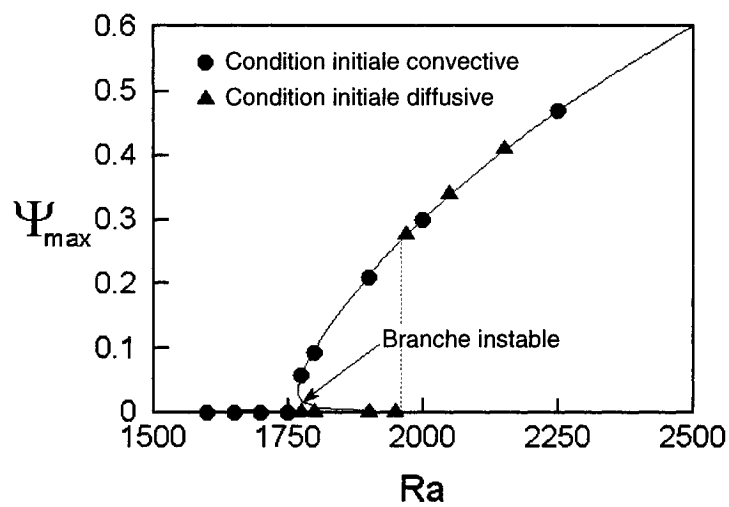


Figure 3.5 : Diagramme de bifurcation : variation de  $\Psi_{\max}$  en fonction de  $Ra$  pour  $A_c = 1$   
et  $Pe = 1$

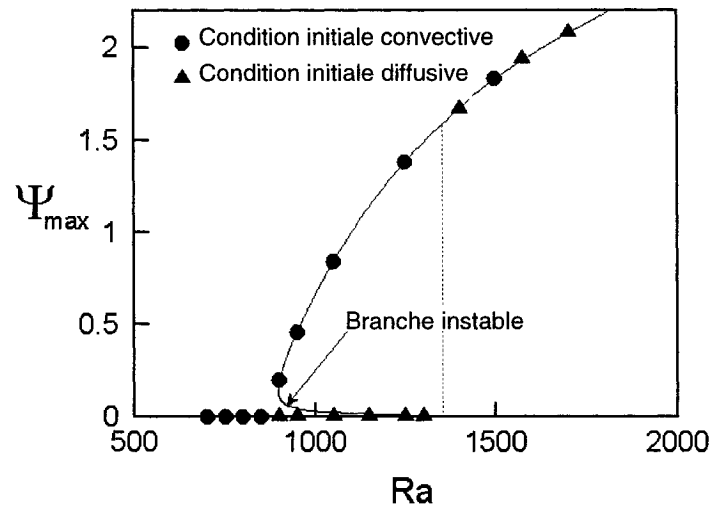


Figure 3.6 : Diagramme de bifurcation : variation de  $\Psi_{\max}$  en fonction de  $Ra$  pour  $A_c = 1$  et  $Pe = 10$

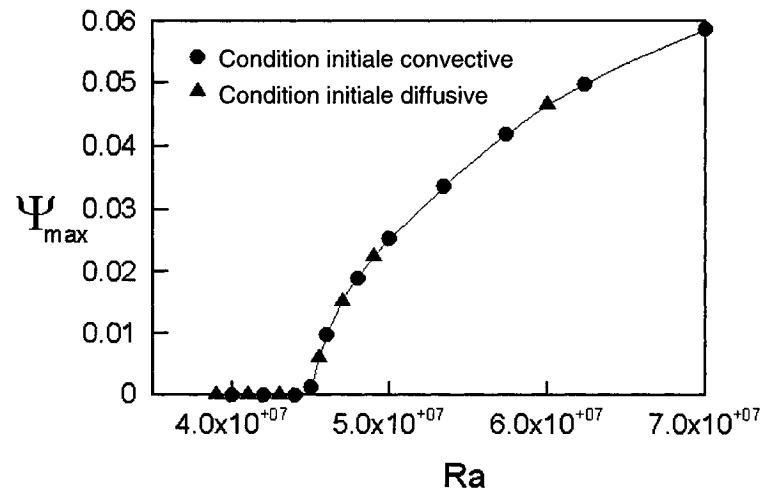


Figure 3.7 : Diagramme de bifurcation : variation de  $\Psi_{\max}$  en fonction de  $Ra$  pour  $A_c = 0.1$  et  $Pe = 0.1$

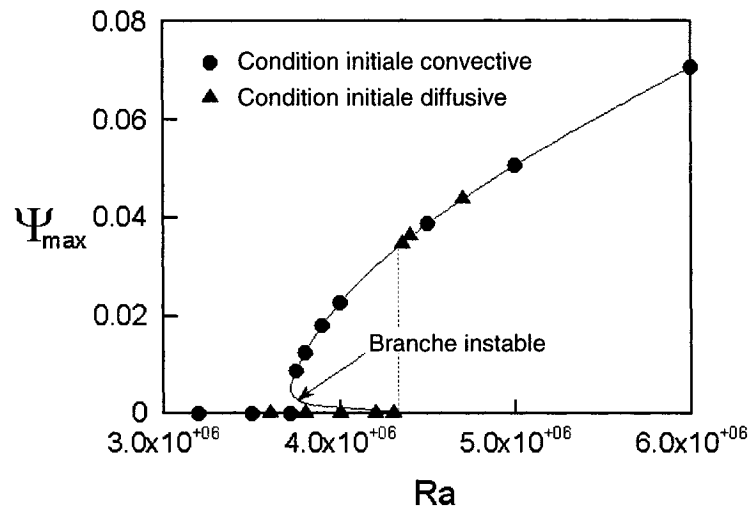


Figure 3.8 : Diagramme de bifurcation : variation de  $\psi_{\max}$  en fonction de  $Ra$  pour  $A_c = 0.1$  et  $Pe = 1$

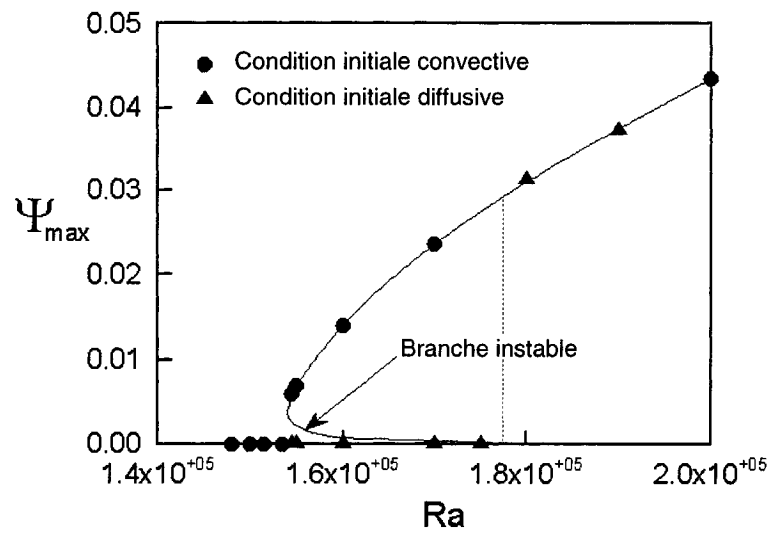


Figure 3.9 : Diagramme de bifurcation : variation de  $\psi_{\max}$  en fonction de  $Ra$  pour  $A_c = 0.1$  et  $Pe = 10$



Cependant, sur la figure 3.5 nous constatons que lorsque nous commençons la simulation par l'état de diffusion en tant qu'état initial et en augmentant le nombre de Rayleigh progressivement, la convection apparaît subitement à un certain nombre de Rayleigh critique. En revanche quand on commence les simulations avec la solution convective obtenue pour un nombre de Rayleigh plus élevé et on diminue graduellement le nombre de Rayleigh pour atteindre l'état de pure diffusion, la disparition du mouvement convectif est progressive et le seuil critique dans ce cas est inférieur à celui trouvé précédemment. Les mêmes observations sont notées dans le cas de  $Pe=10$  sur la figure 3.6.

Sur les figures 3.7, 3.8 et 3.9, les diagrammes de bifurcation sont tracés pour un cylindre facteur de forme  $A_c=0.1$  et pour les nombres de Peclet  $Pe=0.1$ ,  $Pe=1$  et  $Pe=10$ , respectivement. Ces courbes sont obtenues de la même manière que ceux sur les figures 3.4, 3.5 et 3.6, c'est à dire nous débutons les simulations avec un état de diffusion pure, ensuite nous prenons cette solution diffusive comme condition initiale pour simuler un cas avec un nombre de Rayleigh plus grand et ainsi de suite. Cette procédure est répétée jusqu'à l'obtention de la solution convective. Après l'obtention de la solution convective, nous prenons cette solution comme condition initiale pour simuler un cas avec un nombre de Rayleigh plus petit et ainsi de suite jusqu'à avoir l'état de diffusion. Pour ce cas aussi, les résultats montrent les mêmes constatations déjà observées sur les figures 3.4, 3.5 et 3.6, c'est-à-dire que pour  $Pe=1$  et  $Pe=10$  le nombre de Rayleigh critique de l'apparition de la convection est supérieure à celui de la disparition de cette dernière.

Ce comportement caractéristique de la bifurcation sous critique a été observé aussi expérimentalement dans une étude récente par Mogami et al. (2004), ces derniers ont étudié la bioconvection dans une suspension du protozoaire gravitactique *Tetrahymena pyriformis* en fonction de la gravité (qui est en d'autre terme le nombre de Rayleigh). Lorsque ces auteurs augmentent la gravité progressivement à travers un système

d'accélérateur centrifuge, ils notent que la bioconvection apparaît à une certaine valeur de gravité égale à  $1.5 \pm 0.12g$  (Figure 3.10a), cependant lorsqu'ils diminuent la gravité progressivement la bioconvection disparaît à une valeur inférieure à la première valeur de l'apparition de la bioconvection et égale à  $1.2 \pm 0.12g$  (Figure 3.10b).

Childress (1981) a effectué un travail qui n'a pas été publié, dans lequel une analyse de stabilité non linéaire de la bioconvection gravitactique a conduit à supposer que la bioconvection est une bifurcation souscritique. En conséquence, nous pouvons conclure que la bioconvection gravitactique est une bifurcation souscritique de l'état diffusif.

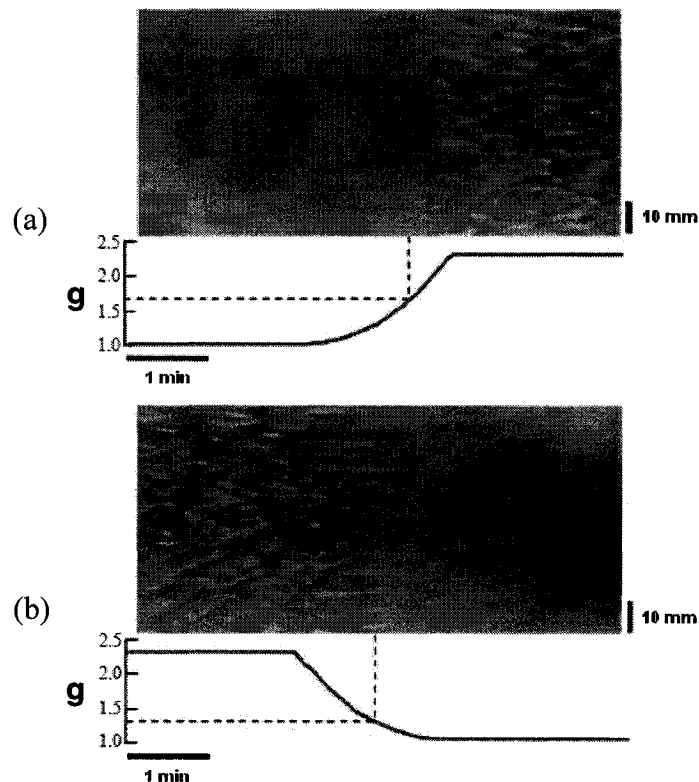


Figure 3.10 : Variation de formation de la bioconvection en fonction de la variation de gravité dans une suspension de  $10^6$  cell/ml de *Tetrahymena pyriformis* (Mogami et al., 2004)

Pour examiner l'effet du nombre de Peclet sur l'écoulement et la distribution de concentration des microorganismes à l'intérieur d'un cylindre avec un rapport de forme  $A_c = 1$ , nous avons tracé sur la figure 3.11 les lignes de courant (à droite) et les isoconcentrations (à gauche) pour quatre différents nombres de Peclet ( $Pe = 0.1, 1, 5$  et  $10$ ) à des nombres de Rayleigh voisins des seuils souscritiques. La solution représentée sur la figure 3.11a pour un nombre de Peclet  $Pe=0.1$  montre que l'écoulement est symétrique par rapport à la hauteur de la cavité et la cellule convective est décalée vers la droite. Les isoconcentrations sont presque des lignes équidistantes, ce qui veut dire que le gradient de concentration vertical est à peu près constant sur toute la hauteur du cylindre. Pour un nombre de Peclet  $Pe=1$ , la cellule convective se décale légèrement vers le haut mais reste semblable au cas de  $Pe=0.1$ , cependant nous remarquons bien une augmentation du gradient de concentration des microorganismes du haut du cylindre par rapport au gradient du bas. La figure 3.11c présente le cas de  $Pe=5$  où la cellule convective est décalée encore plus vers le haut du cylindre et légèrement vers la droite. Dans ce cas, le gradient de concentration des microorganismes en haut du cylindre est clairement supérieur à celui du bas. De même, cette augmentation du gradient de concentration est d'autant plus forte pour le cas  $Pe=10$  (figure 3.11d) et la cellule convective dans ce cas est décalée vers le haut et au coin droite du cylindre.

Sur la figure 3.12 nous présentons les lignes de courant et les isoconcentrations pour un cylindre d'un facteur de forme  $A_c = 0.1$  et pour plusieurs valeurs du nombre de Peclet ( $Pe = 0.1, 1, 5$  et  $10$ ). De même que pour la figure 3.11, ces résultats sont obtenus à un nombre de Rayleigh voisin au seuil souscritique. Cette figure illustre la grande influence du nombre de Peclet et du facteur de forme du cylindre sur la fonction de courant et sur la distribution de concentration. Pour  $Pe=0.1$  (figures 3.12a), nous constatons que la cellule convective occupe toute la hauteur du cylindre et la concentration de microorganismes s'étend sur toute la hauteur le cylindre. Cependant, pour les nombres de Peclet plus élevés  $Pe=5$  et  $Pe=10$  (figures 3.12c et 3.12d) les microorganismes sont

accumulés en haut du cylindre et la cellule de convection est concentrée dans la région supérieure du cylindre.

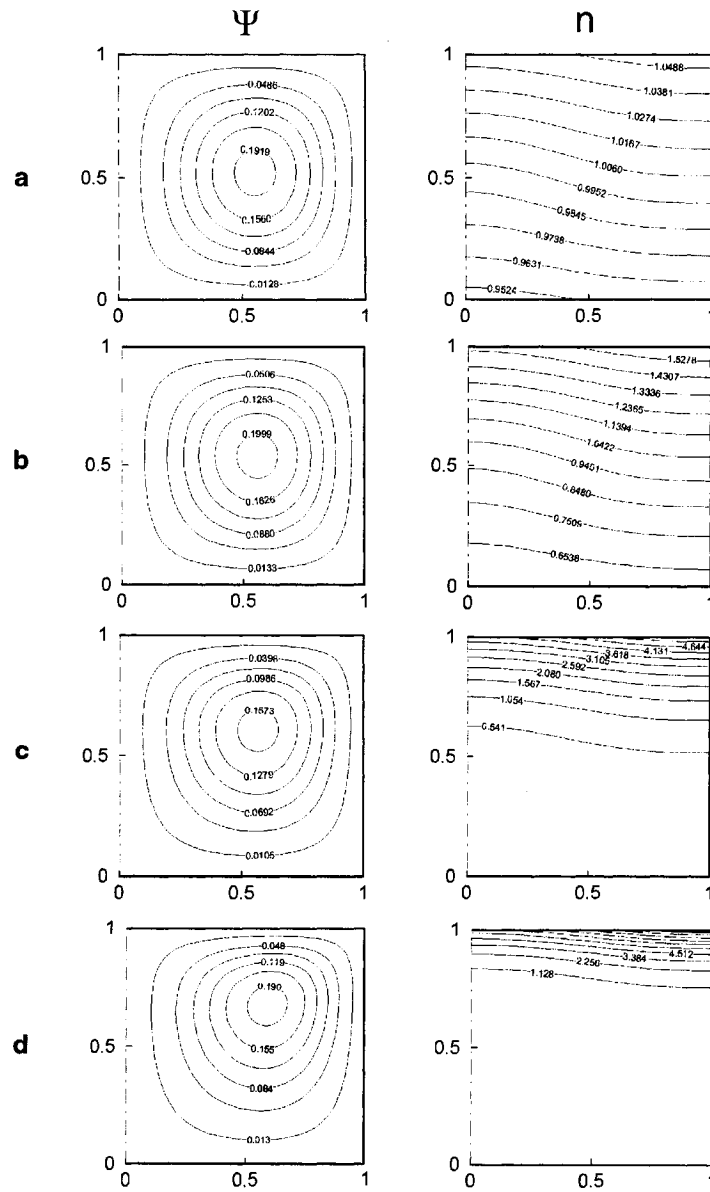


Figure 3.11 : Effet de  $Pe$  sur les lignes de courant et les isoconcentrations pour  $A_c = 1$ ;  
 (a)  $Pe = 0.1$ ,  $Ra = 18000$ ; (b)  $Pe = 1$ ,  $Ra = 1900$ ; (c)  $Pe = 5$ ,  $Ra = 700$ ; (d)  $Pe = 10$ ,  
 $Ra = 900$

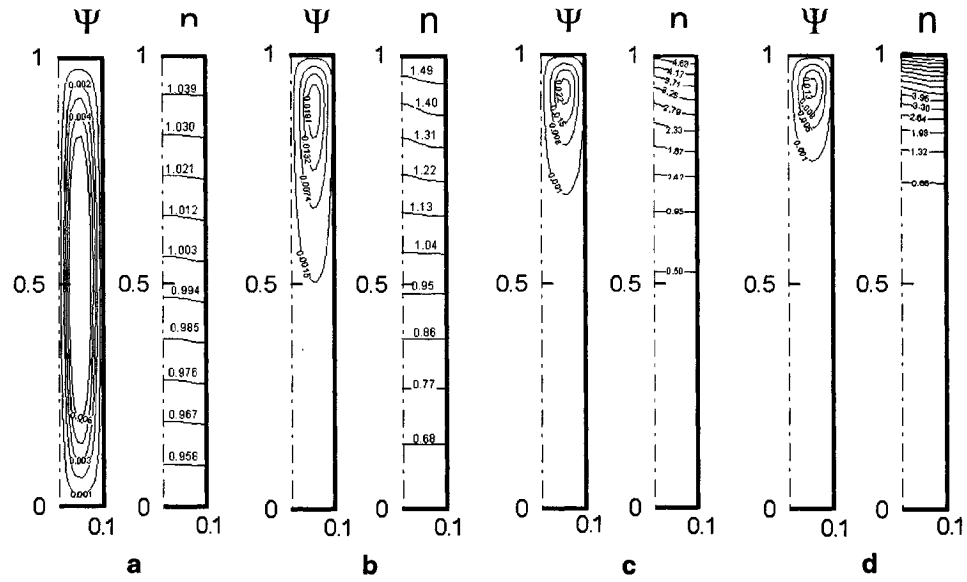


Figure 3.12 : Effet de  $Pe$  sur les lignes de courant et les isoconcentrations pour  $A_c = 0.1$ ; (a)  $Pe = 0.1$ ,  $Ra = 4.6 \times 10^7$ ; (b)  $Pe = 1$ ,  $Ra = 4 \times 10^6$ ; (c)  $Pe = 5$ ,  $Ra = 4.3 \times 10^5$ ; (d)  $Pe = 10$ ,  $Ra = 1.6 \times 10^5$

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la bioconvection gravitactique dans un cylindre vertical pour les deux facteurs de forme  $A_c = 0.1$  et  $A_c = 1$ , pour les nombres de Peclet  $Pe = 0.1, 1, 5$  et  $10$ . La solution du problème a été obtenue avec un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis. Les courbes de bifurcations ont été tracées et les champs d'écoulement et de concentration ont été analysés en détails. Les résultats numériques montrent l'influence du nombre de Peclet sur la structure de l'écoulement et la distribution de concentration à l'intérieur du cylindre. Nous avons constaté que lorsque le nombre de Peclet est assez faible, le phénomène de la bioconvection

gravitactique est similaire à la convection naturelle de Bénard, dans ce cas la bifurcation de l'état de diffusion est supercritique. Cependant, lorsque le nombre de Peclet augmente, les courbes de bifurcation montrent l'existence d'une bifurcation souscritique. Les résultats expérimentaux de Mogami et al. 2004 ainsi que le travail non publié de Childress (1981) sur la stabilité non linéaire confirment cette constatation. Le nombre de Peclet et le rapport de forme ont une grande influence sur l'écoulement et la distribution de concentration à l'intérieur du cylindre. Nous avons montré que lorsque le nombre de Peclet augmente, le gradient de concentration des microorganismes en haut de la cavité est plus important et l'écoulement convectif est centré en haut du cylindre. Par contre pour les petits nombres de Peclet, la cellule de convection est centrée par rapport à la hauteur du cylindre et le gradient de concentration vertical est moins important.

## CHAPITRE IV

### CONVECTION NATURELLE EN PRÉSENCE D'UN ÉCOULEMENT VERTICAL TRAVERSANT

#### **4.1 Introduction**

Nous avons constaté dans le chapitre 3 que la bioconvection gravitactique est similaire à la convection de Bénard lorsque le nombre de Peclet est très faible. En effet, les équations gouvernant la bioconvection gravitactique sont similaires, à un signe près, à celle de la convection naturelle de Bénard lorsque le nombre de Peclet tend vers zéro. Lorsque le nombre de Peclet n'est plus négligeable, le phénomène de la bioconvection gravitactique est similaire à la convection naturelle de Bénard en présence d'un écoulement vertical traversant. Pour vérifier cette analogie nous avons étudié la convection de Bénard en présence d'un écoulement vertical. Plusieurs études ont été réalisées pour le milieu poreux et très peu d'études ont été consacrées au milieu fluide. Pour approfondir le problème et pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux de la littérature nous avons donc considéré le milieu poreux. D'après la revue de littérature présentée dans le chapitre 1 sur la convection naturelle avec un écoulement traversant, nous constatons qu'il n'y a pas d'étude de simulation numérique effectuée pour ce cas, la majorité des études porte sur le problème de la stabilité linéaire, et il y a seulement l'étude de Homsy et Sherwood (1976) qui traite la stabilité linéaire et la stabilité non linéaire. Ces auteurs ont constaté que les limites des deux méthodes divergent lorsque le nombre de Peclet augmente, ce qui implique que l'instabilité peut être souscritique. L'objectif principal de notre étude est donc l'étude de la convection naturelle en présence d'un écoulement vertical traversant en utilisant la stabilité linéaire et la simulation numérique. Ceci nous permettra d'éclaircir le problème et de comparer nos

résultats avec les résultats de la stabilité non linéaire. Les équations régissant le phénomène ainsi que les conditions aux limites ont été exposées au chapitre 2 et les résultats de cette étude ont été publiés dans l'article présenté par Alloui et al. (2005).

## **4.2 Étude de la stabilité linéaire**

Les résultats présentés dans cette section sont obtenus en résolvant les équations de perturbations (2.58) et (2.59), et les conditions aux limites (2.60) et (2.61) pour le cas de la stabilité marginal ( $p = 0$ ).

### **4.2.1 Validation du code numérique**

Pour valider notre code numérique nous avons considéré d'abord le problème de Bénard pour une couche poreuse horizontale (sans écoulement vertical  $Pe=0$ ). À partir d'un nombre de pas  $N=60$ , le calcul de stabilité converge bien. L'erreur dans ce cas pour le calcul du seuil et du nombre d'onde est :  $2 \times 10^{-2} \%$ . L'influence du maillage sur la précision des valeurs devient négligeable pour  $N \geq 60$ . Le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique, calculés pour un maillage de 60 nœuds dans la direction verticale, sont en accord avec les valeurs analytiques  $Ra_c = 4\pi^2$  et  $\alpha_c = \pi$ .

Dans le cas où il y a un écoulement vertical ( $Pe \neq 0$ ), nos résultats sont comparés avec ceux de la littérature. Le tableau 4.1 donne les valeurs du nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique pour différentes valeurs du nombre de Peclet pour couche poreuse soumise à des conditions aux limites isothermes. Les résultats montrent une très bonne concordance entre nos résultats et ceux de Nield (1998) et Homsy et Sherwood (1976).



Tableau 4.1: Comparaison entre nos résultats et ceux de la de Nield (1998) et Homsy et Sherwood (1976) pour la condition aux limites isotherme et pour plusieurs nombre de Peclet

	Présente étude		Nield (1998)		Homsy (1976)	
Pe	$Ra_c$	$\alpha_c$	$Ra_c$	$\alpha_c$	$Ra_c$	$\alpha_c$
0	39,47	3,14	39,48	3,14	40	3,1
2	45,06	3,29	45,08	3,29	45	3,3
4	61,63	3,79	61,67	3,79	62	3,8
6	86,53	4,73	86,59	4,73	86	4,7
8	114,2	6,10	114,7	6,10	114	6,1

#### 4.2.2 Résultats et discussion

La figure 4.1 représente les diagrammes de stabilité marginale pour les cas de conditions aux limites isothermes. Sur cette figure, plusieurs courbes sont représentées pour différents nombres de Peclet. La région qui se situe en dessus de chaque courbe  $Ra(\alpha)$  est instable, tandis que la région qui se situe en dessous de la courbe est stable. Le minimum de chaque courbe représente donc le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  obtenu pour un nombre d'onde critique  $\alpha_c$ . Ce point représente le point critique de l'apparition de la convection. Dans le cas où il n'y pas d'écoulement vertical ( $Pe=0$ ), les courbes sur la figure 4.1 montrent que le point critique est ( $Ra_c=39,47$ ,  $\alpha_c=3,14$ ). Ce cas représente le cas du problème classique de Bénard pour une couche poreuse soumise à une température constante sur les frontières horizontales. Pour  $Pe=1$ , nous constatons qu'il n'y a pas de grand changement dans la courbe de stabilité marginale et dans les valeurs du nombre de Rayleigh critique et du nombre d'onde critique par rapport au cas de  $Pe=0$ . Cependant pour les autres valeurs du nombre de Peclet représentés, nous remarquons que les courbes de stabilité marginale se décalent par rapport au cas  $Pe=0$ .

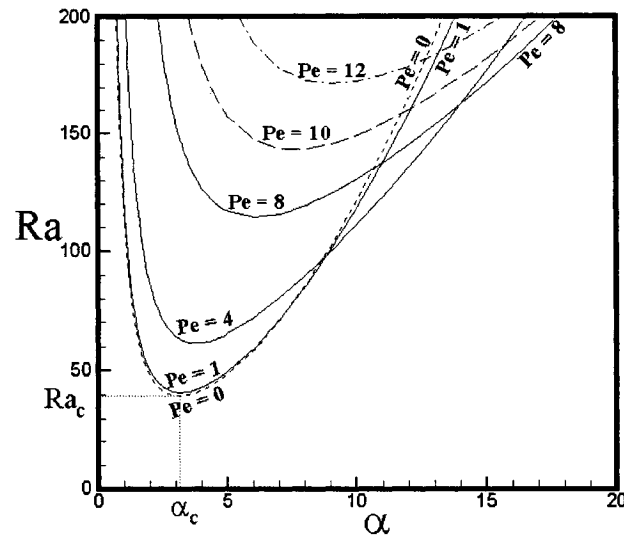


Figure 4.1 : Diagramme de stabilité pour différents nombres de Peclet sous la condition aux limites isotherme.

La figure 4.2 montre l'influence du nombre de Peclet sur le nombre de Rayleigh critique. L'influence du nombre de Peclet sur le nombre d'onde critique est donnée sur la figure 4.3. Il apparaît de ces deux figures (figure 4.2 et figure 4.3) que le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique augmentent avec le nombre de Peclet. L'augmentation du nombre de Rayleigh critique veut dire que l'écoulement vertical traversant la couche poreuse a un effet stabilisateur sur la convection naturelle. Pour le nombre d'onde critique, l'augmentation avec le nombre de Peclet indique que la longueur d'onde critique diminue et que les cellules convectives à l'apparition de convection deviennent de plus en plus étroites au fur et à mesure que le nombre de Peclet augmente.

Par ailleurs, pour le cas où il n'y a pas d'écoulement vertical ( $Pe = 0$ ), nous retrouvons les valeurs connues de la convection de Bénard avec un Rayleigh critique égale à 40, et un nombre d'onde critique égale à 3.14.

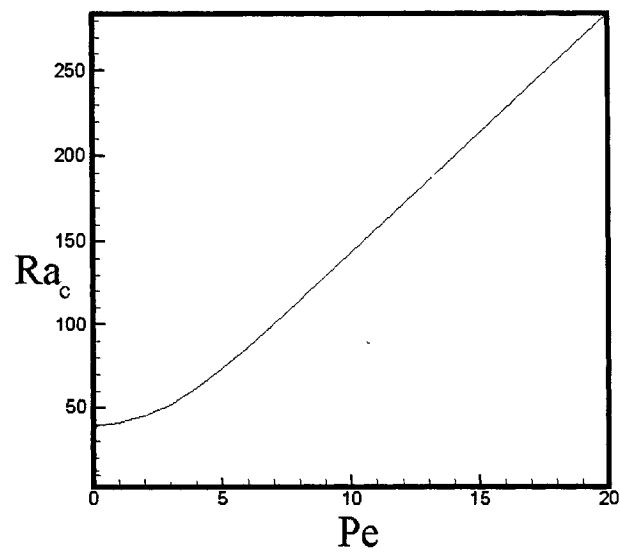


Figure 4.2 : Variation du nombre de Rayleigh critique avec le nombre de Peclet.

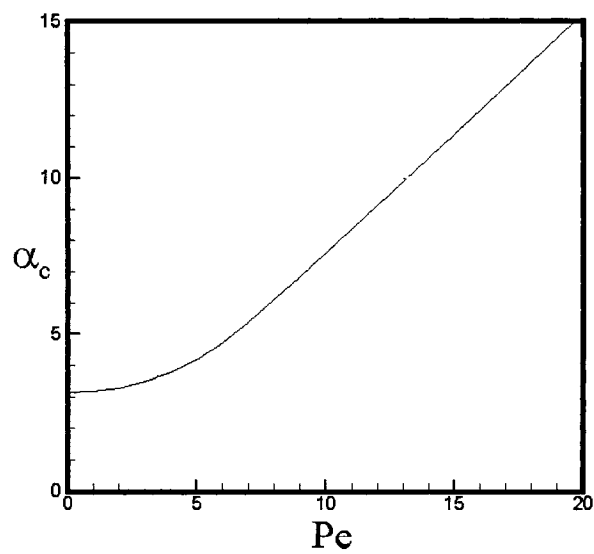


Figure 4.3 : Variation du nombre de d'onde critique avec le nombre de Peclet.

La figure 4.4 représente les variations du nombre de Rayleigh critique adimensionnel ( $Ra_c^* = Ra_c / Pe$ ) et du nombre d'onde critique adimensionnel ( $\alpha_c^* = \alpha_c / Pe$ ) avec le nombre de Peclet. Cette figure montre que pour des nombres de Peclet supérieurs à 5, le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique augmentent linéairement avec le nombre de Peclet, tel que  $Ra_c = 14.3Pe$  et  $\alpha_c = 0.76Pe$ .

Nous présentons sur la figure 4.5 les lignes de courant et les isothermes au début de la convection pour des valeurs typiques du nombre de Peclet,  $Pe=0, 4$  et  $8$  pour le cas isotherme. Cette figure montre l'influence du nombre de Peclet sur la forme des lignes de courant et des isothermes au début de la convection. En effet, nous constatons que lorsque le nombre de Peclet augmente, la longueur d'onde des cellules convectives diminue. Cette figure nous indique aussi qu'au fur et à mesure que le nombre de Peclet augmente, les cellules convectives se déplacent progressivement pour se concentrer au voisinage de la paroi supérieure de la couche poreuse où le gradient de température est plus fort.

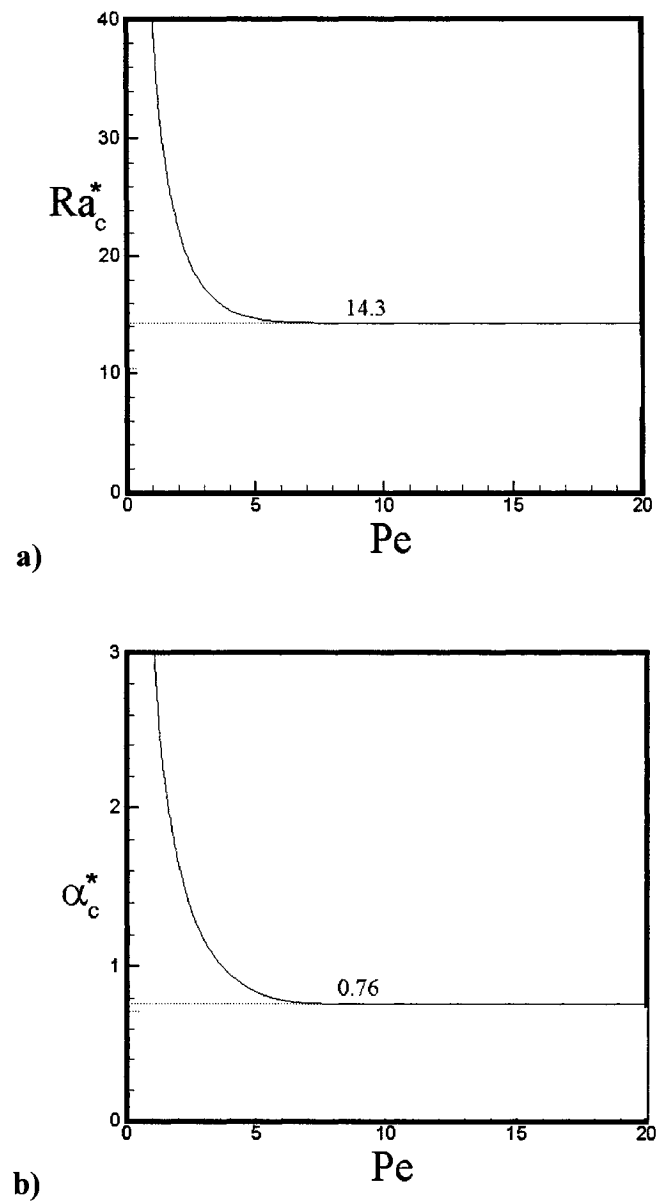


Figure 4.4 : a) Nombre de Rayleigh adimensionné en fonction du nombre de Peclet, b) Nombre d'onde adimensionné en fonction du nombre de Peclet.

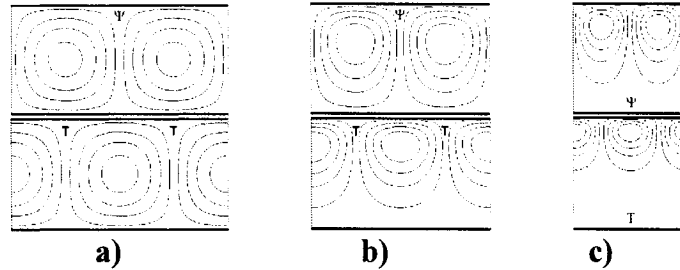


Figure 4.5 : Lignes de courant (en haut) et isothermes (en bas) au début de la convection pour : a)  $Pe=0$ , b)  $Pe=4$ , c)  $Pe=8$  sous la condition aux limites isotherme.

### 4.3 Solution numérique

Les équations de perturbations (2.53) et (2.54) sont résolues numériquement en utilisant le concept des volumes de contrôle présenté dans le deuxième chapitre. Les résultats présentés dans cette section sont obtenus pour une cavité avec un rapport de forme égal à 5, un pas de temps  $\Delta t = 0.001$  et un maillage uniforme de  $41 \times 31$  pour un nombre de Peclet  $Pe=4$ , et  $81 \times 61$  pour un nombre de Peclet  $Pe=8$ .

#### 4.3.1 Validation du code numérique

Les études en littérature portant sur la convection naturelle dans une couche poreuse soumise à un écoulement vertical, ont traitée seulement le problème de la stabilité linéaire analytiquement. Dans ce contexte, il n'existe pas d'étude numérique qui nous permet la validation de notre code. Cependant, la similitude entre la convection naturelle en présence d'un écoulement vertical et la bioconvection gravitactique nous permet de comparer nos résultats avec ceux de la simulation de la bioconvection de la littérature. En effet, la forme des équations de perturbations (2.53) et (2.54) de la convection naturelle avec écoulement traversant vertical est similaire à celle des équations de la bioconvection gravitactique dans un milieu poreux. Afin de valider nos résultats, notre

code numérique a été utilisé donc pour simuler la bioconvection gravitactique dans une cavité poreuse et les résultats ont été comparés avec ceux de Kuznetsov et Jiang (2001). La figure 4.6 présente la fonction de courant et la concentration pour la bioconvection gravitactique dans une cavité carrée avec  $Pe=10$  et  $Ra=245$ . La solution obtenue avec notre code de calcul est en excellente concordance avec celle de Kuznetsov et Jiang (2001).

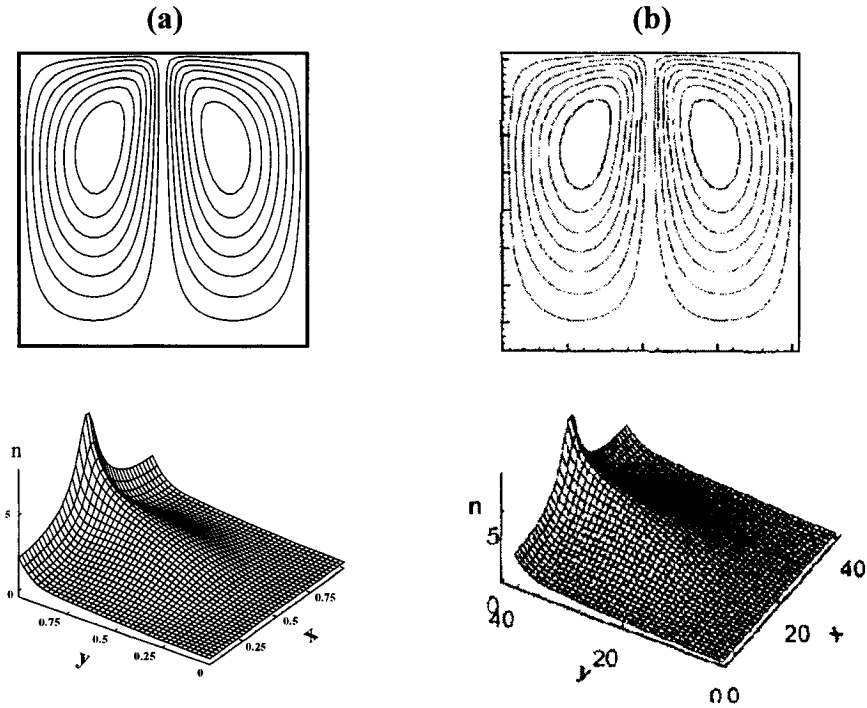


Figure 4.6 : Comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature, fonction de courant et concentration. Bioconvection gravitactique dans une cavité poreuse avec  $A=1$ ,  $Pe=10$ ,  $Ra = 245$ : a) Notre code, b) Résultat de Kuznetsov et Jiang (2001).

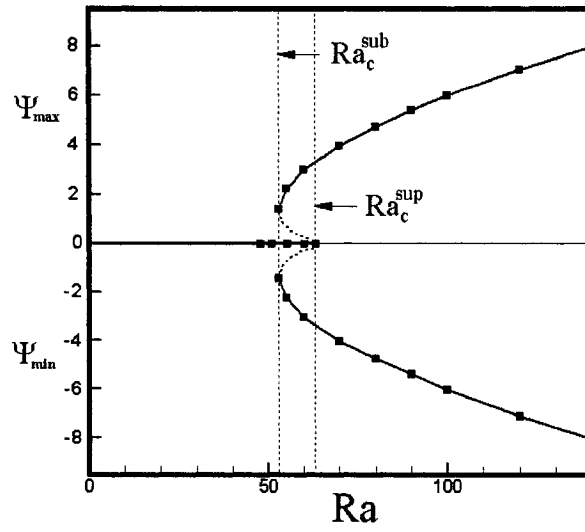
### 4.3.2 Résultats et discussion

La figure 4.7 présente les courbes de bifurcation  $\psi_{\min}$  et  $\psi_{\max}$  en fonction du nombre de Rayleigh pour une cavité avec un facteur de forme égale à 5. La figure 4.7a est obtenue pour un nombre de Peclet  $Pe=4$  et la figure 4.7b pour un nombre de Peclet  $Pe=8$ . Ces

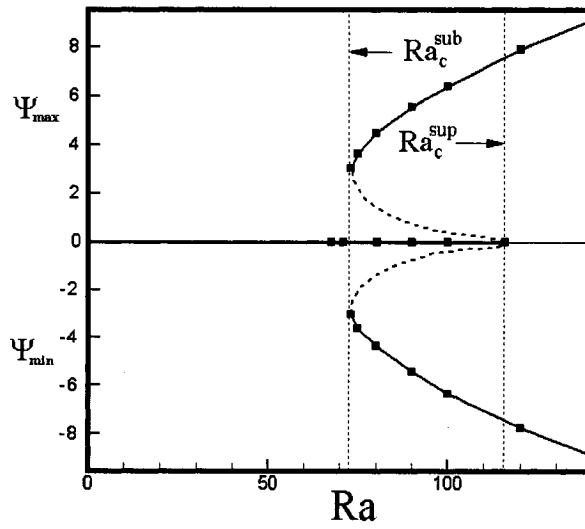
courbes sont obtenues de la même manière mentionnée dans le chapitre 3 où nous avons traité la bioconvection gravitactique dans un cylindre vertical. C'est-à-dire, d'une part en commençant la simulation par l'état de conduction en tant qu'état initial et augmentant ensuite graduellement le nombre de Rayleigh jusqu'à ce que la convection surgisse, et d'autre part, une fois la solution au nombre de Rayleigh le plus élevé est obtenue, nous prenons cette solution comme état initial et nous procédons ensuite dans le chemin inverse pour obtenir des solutions aux nombres inférieurs de Rayleigh. Similairement au cas de la bioconvection gravitactique, nous constatons que la bifurcation dans ce cas aussi est souscritique. En effet, en augmentant le nombre de Rayleigh à partir de l'état de conduction la convection apparaît subitement à une certaine valeur du nombre de Rayleigh  $Ra_c^{\text{sup}}$  appelée supercritique, cependant lorsque nous diminuons le nombre de Rayleigh à partir de l'état de convection progressivement, la convection disparaît subitement à une certaine valeur du nombre de Rayleigh  $Ra_c^{\text{sub}}$  appelée souscritique et qui est inférieur à la première valeur. Les lignes pointillées sur les courbes de bifurcations représentent les branches instables et les lignes continues les branches stables de la solution.

Les deux nombres de Rayleigh supercritique et sous critique sont indiqués sur les courbes de bifurcation, la région qui se situe entre le nombre de Rayleigh souscritique et le zéro, représente le régime de conduction pure dans lequel le fluide est inconditionnellement stable. La zone entre le nombre de Rayleigh souscritique et le nombre de Rayleigh supercritique, correspond au régime de convection sous critique. Dans cette zone, nous pouvons avoir deux solutions possibles, la conduction pure ou la convection. Cependant, la région dans laquelle le nombre de Rayleigh est supérieur à la limite supercritique, l'état de repos est inconditionnellement instable. Nous observons que la zone entre le nombre de Rayleigh souscritique et le nombre de Rayleigh supercritique est plus grande dans le cas de  $Pe=8$  que  $Pe=4$ .





a)



b)

Figure 4.7 : Courbe de bifurcation pour la condition aux limites isotherme pour : a)  $Pe=4$ , b)  $Pe=8$

Les champs d'écoulement et de température définis respectivement par les lignes de courant et les isothermes, obtenus au seuil souscritique ( $Ra_c^{sub}$ ) et supercritique ( $Ra_c^{sup}$ ), sont présentés sur la figure 4.8, pour  $Pe=8$ .

L'écoulement total représenté par la fonction de courant  $\Psi$  et la température  $T$  est obtenue en additionnant l'écoulement de base  $\Psi_B$  et  $T_B$  aux perturbations  $\tilde{\Psi}$  et  $\tilde{T}$ , respectivement. La figure 4.8a montre que dans la cavité avec un facteur de forme  $A=5$ , nous avons 10 cellules contrarotatives. L'écoulement traversant la cavité représenté par le nombre de Peclet tend à repousser les cellules convectives vers le haut de la cavité, ainsi elles sont décalées dans le sens de l'écoulement traversant et le gradient de température est plus fort en haut de la cavité qu'en bas de celle-ci. Cette observation est similaire à celle constatée dans le cas de la bioconvection gravitactique dans le chapitre 3.

Sur la figure 4.8b qui représente la structure de l'écoulement obtenue au seuil supercritique ( $Ra_c^{sup}$ ) nous avons le même nombre de cellules que pour le cas souscritique (figure 4.8a), cependant les cellules de convection sont centrées par rapport à la hauteur de la cavité. Ceci est dû au fait qu'au nombre de Rayleigh supercritique qui est supérieur au nombre de Rayleigh souscritique, l'écoulement engendré par la convection au sein de la cavité est plus fort.

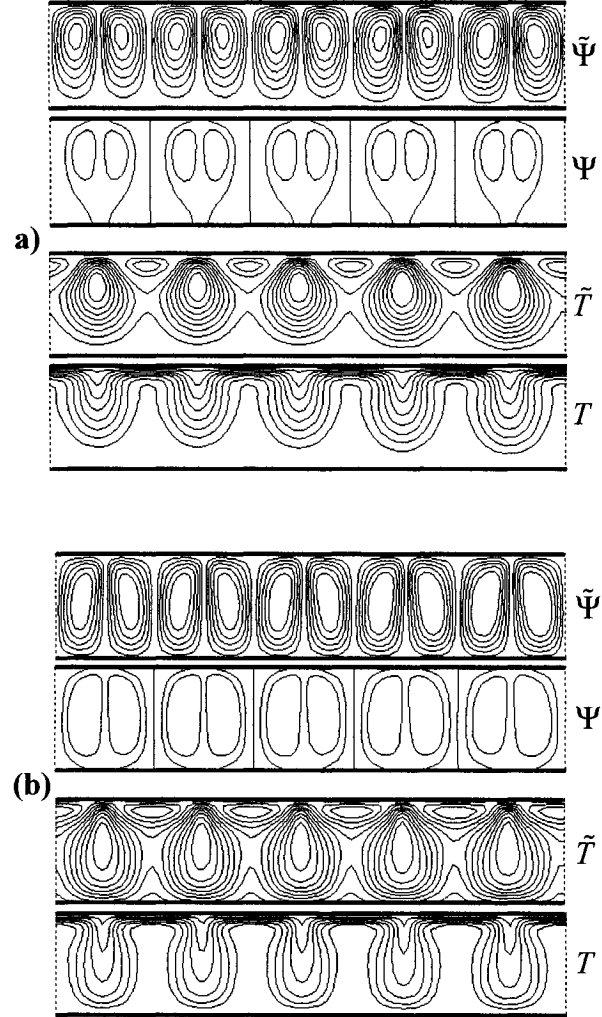


Figure 4.8 : Lignes de courant (en haut) et isothermes (en bas) pour  $A=5$ ,  $Pe=8$  sous la condition isotherme : a)  $Ra = Ra_c^{sub}$ , b)  $Ra = Ra_c^{sup}$

Les résultats de la stabilité linéaire et de la simulation numérique en terme des nombres de Rayleigh souscritique et supercritique sont représentés sur la figure 4.9 en fonction du nombre de Peclet.

Les résultats numériques sont représentés par des points tandis que les résultats de la stabilité linéaire par des lignes. Dans la figure 4.9 qui illustre le cas de la condition aux limites isotherme nous avons aussi représenté par une ligne discontinue les résultats de la méthode d'énergie de Homsy et Sherwood (1976). Les courbes montrent que les nombres de Rayleigh critique augmentent avec l'augmentation du nombre de Peclet pour les deux cas de conditions aux limites considérés. Les résultats de simulation numérique en terme de Rayleigh supercritique collent parfaitement avec ceux de la stabilité linéaire.

Dans le cas où il n'y pas d'écoulement vertical ( $Pe=0$ ), toutes les courbes sur la figure 4.9 convergent vers le même point critique qui représente le cas de la convection de Bénard dans une couche poreuse. Cependant, lorsque le nombre de Peclet augmente, la différence entre le Rayleigh supercritique et le Rayleigh souscritique devient de plus en plus importante.

Sur la figure 4.9, nous constatons que les valeurs du nombre de Rayleigh souscritique sont légèrement supérieures aux résultats de la méthode d'énergie de Homsy et Sherwood (1976). Il faut noter ici que la méthode d'énergie fournit la condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire pour des nombres de Rayleigh inférieur à la limite de la méthode de l'énergie, nous pouvons affirmer que l'écoulement de base est stable.

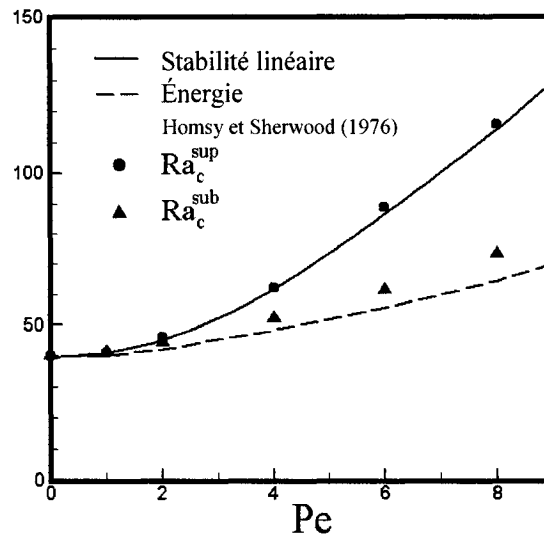


Figure 4.9 : Variation de  $Ra_c^{sub}$  et  $Ra_c^{sup}$  avec le nombre de Peclet.

En effet, la théorie de la stabilité linéaire nous fournit un critère de stabilité pour les perturbations infiniment petites, par contre pour les perturbations de taille finie la stabilité linéaire n'est plus adaptée, dans ce cas la méthode d'énergie peut fournir des résultats et peut constituer un complément de la théorie linéaire de stabilité. La stabilité linéaire donne donc une condition suffisante d'instabilité, c'est-à-dire qu'au delà de la limite de la théorie linéaire, l'écoulement de base est forcément instable.

Dans ce contexte, nos résultats sont parfaitement consistants, puisque entre les deux limites de la stabilité linéaire et la méthode d'énergie représentées sur la figure 4.9 deux solutions sont possibles, la solution de conduction et la solution de convection.

#### **4.4 Conclusion**

Nous avons étudié la convection naturelle dans un milieu poreux en présence d'un écoulement vertical traversant, et nous avons déterminé les seuils critiques d'apparition de la convection. La stabilité de l'état de conduction a été établie en utilisant la théorie de perturbation linéaire, et en résolvant les équations gouvernantes le problème par la méthode des volumes finis.

Nous avons constaté que le développement de la convection naturelle en présence d'un écoulement traversant est très différent de celui de la convection de Bénard lorsque le nombre de Peclet est important. Cependant, le phénomène de la convection naturelle avec un écoulement traversant est très similaire au phénomène de bioconvection gravitactique. Lorsque le nombre de Peclet augmente, le nombre d'onde critique augmente aussi et l'écoulement devient multicellulaire. Nous avons constaté aussi que l'écoulement vertical traversant la couche poreuse a un effet stabilisateur sur la convection naturelle.

Tout comme la bioconvection gravitactique, les résultats du programme numérique démontrent l'existence d'une instabilité sous critique. Ceci peut être considéré comme preuve de la supposition de Homsy et Sherwood (1976) qui précise que entre les deux limites (de la stabilité linéaire et la méthode d'énergie), la couche poreuse peut devenir instable pour des perturbations de taille finie.

## CHAPITRE V

### THERMO-BIOCONVECTION GRAVITACTIQUE

#### **5.1 Introduction**

Dans le cas de la convection double diffusive, il y a deux agents qui contribuent à la poussée d'Archimède. Ces deux agents sont fréquemment le gradient thermique et le gradient de concentration. Ces derniers peuvent agir soit ensemble soit en opposition. Dans le cas où les deux forces sont en opposition, des comportements dynamiques intéressants peuvent en résulter, notamment l'existence de la convection souscritique. Nous avons montré dans les deux chapitres précédents que la bioconvection gravitactique et la convection naturelle en présence d'un écoulement vertical traversant se développent de façon souscritique quoi qu'il y ait seulement une force qui contribue à la poussée d'Archimède. La revue de littérature présentée dans le chapitre 1 montre que dans le cas de la double diffusion en bioconvection, il y a seulement quelques études analytiques du problème de stabilité linéaire qui ont été réalisées récemment sur le modèle gyrotactique, et il n'y a aucune étude qui concerne le modèle gravitactique.

Dans ce chapitre, notre objectif principal est l'étude des effets thermiques sur la stabilité et le développement de convection dans une suspension de microorganismes gravitactiques. L'écoulement est régi dans ce cas par les équations de Navier-Stokes avec l'approximation de Boussinesq, l'équation de diffusion-convection pour la concentration des microorganismes et l'équation d'énergie pour la température. La théorie de la stabilité linéaire a été employée pour obtenir les diagrammes de stabilité et les seuils critiques de l'apparition de la convection (Alloui et al., 2006a). Les équations qui régissent le phénomène de la thermo-bioconvection ont été résolues à l'aide d'un

code numérique basé sur la méthode des volumes de contrôle pour une cavité carrée avec des parois verticales libres, par la suite nous avons considéré une cavité avec des parois verticales rigides et un cylindre vertical pour voir l'effet des parois rigides et l'effet de la courbure. Les courbes de bifurcations ont été tracées et les champs d'écoulement et de concentration ont été analysés en détail (Alloui et al., 2006b).

## **5.2 Étude de la stabilité linéaire**

Le problème est gouverné par plusieurs paramètres adimensionnels qui sont le nombre de Rayleigh de bioconvection  $Ra$ , le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , le nombre de Schmidt  $Sc$ , le nombre de Lewis  $Le$ , et le nombre de Peclet  $Pe$ . Les résultats ont été obtenus pour  $Sc=1$  et  $Le=1$ .

Premièrement nous avons tracé le nombre de Rayleigh  $Ra$  au début de la bioconvection en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour différents nombres de Rayleigh thermiques  $Ra_T$ . Les courbes de  $Ra$  en fonction de  $\alpha$  présentées sur les figures 5.1, 5.2 et 5.3 représentent les diagrammes de stabilité marginale pour différents nombres de Rayleigh thermique,  $Ra_T = -1000, -500, 0, 500, 1000$  et  $1708$ , et pour trois valeurs typiques du nombre de Peclet,  $Pe=0.1, 1$  et  $10$ . La région au-dessus de chaque courbe est instable, et celle qui est en dessous est stable. Le minimum de chaque courbe correspond au nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  de l'apparition de la convection obtenu à une valeur critique du nombre d'onde  $\alpha_c$ .

La figure 5.1 montre l'influence du nombre de Rayleigh thermique sur la courbe de stabilité marginale et sur le point critique de l'apparition de la convection. Nous constatons que pour tous les nombres de Peclet considérés, dans le cas du chauffage par le bas, les courbes de stabilité marginale se décalent vers le bas par rapport au cas  $Ra_T = 0$ , et lorsque le refroidissement par le bas est appliqué, ces courbes se décalent



vers le haut. Le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  et le nombre d'onde critique  $\alpha_c$  en fonction du nombre de Peclet sont présentés sur la figure 5.4 pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh thermique ( $Ra_T = -1000, 0, 1000$  et  $1708$ ). Pour le cas d'une couche isotherme, c'est-à-dire pour  $Ra_T = 0$  nous retrouvons bien les résultats de Bahloul et al. (2004). Pour un nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T = 1708$ , le nombre de Rayleigh critique de la bioconvection est égale à zéro, et le nombre d'onde critique est égale à 3.12, pour toutes les valeurs du nombre de Peclet. En effet, ce cas correspond au cas d'une couche fluide chauffée par le bas par une température constante. Lorsque le nombre de Rayleigh thermique est supérieur à 1708 nous retrouvons des nombres de Rayleigh critiques de bioconvection négatifs, dans ce cas les résultats ne sont pas présentés sur la figure puisqu'un nombre de Rayleigh de bioconvection négatif n'a pas de sens physique.

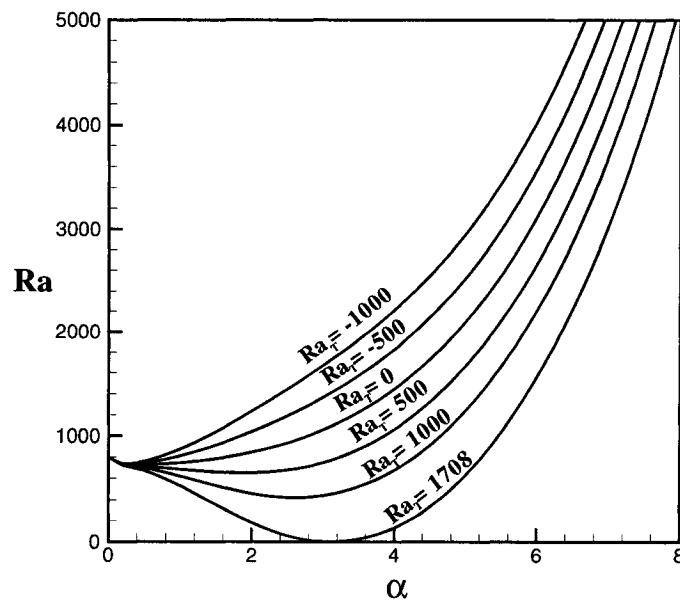


Figure 5.1 : Diagramme de stabilité pour différents nombres de Rayleigh thermique pour  $Pe = 0.1$

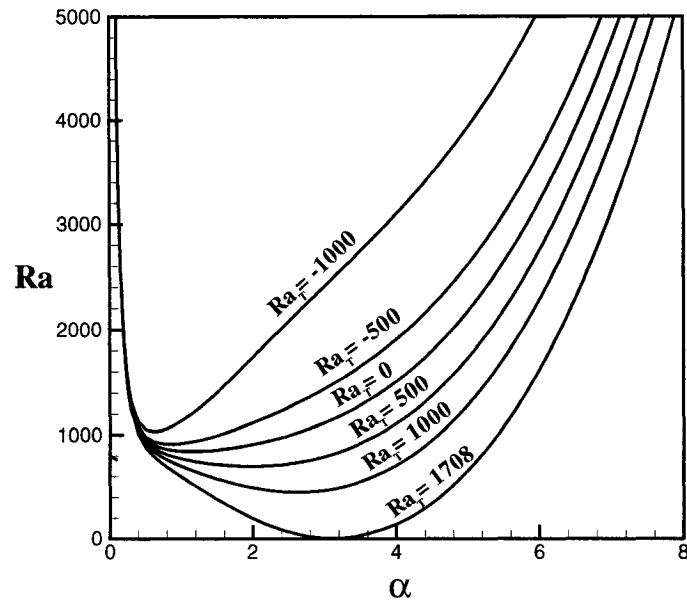


Figure 5.2 : Diagramme de stabilité pour différents nombres de Rayleigh thermique pour  $Pe = 1$

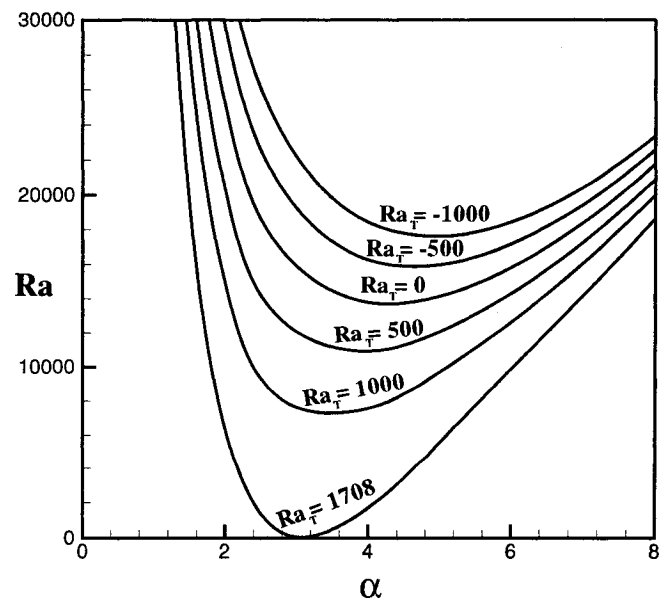


Figure 5.3 : Diagramme de stabilité pour différents nombres de Rayleigh thermique pour  $Pe = 10$

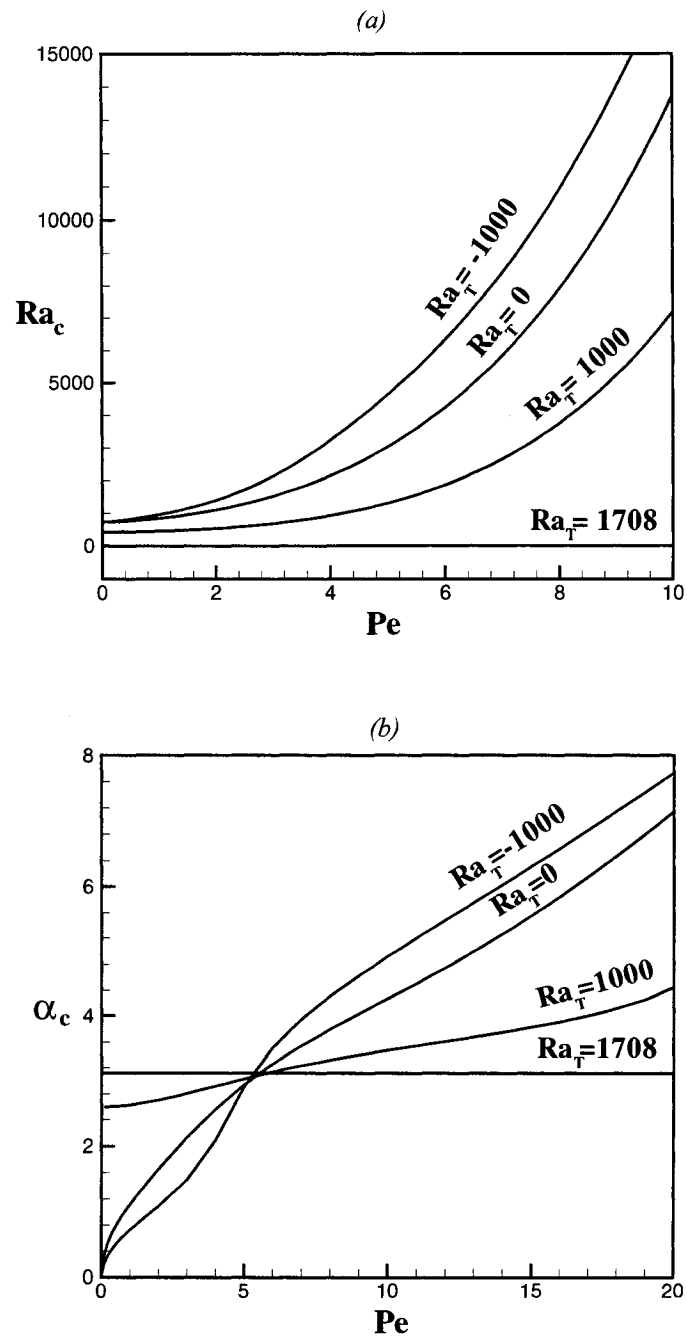


Figure 5.4 : Effet du nombre de Peclet sur; (a) le nombre de Rayleigh critique de bioconvection, (b) le nombre d'onde critique correspondant, pour différents nombres de Rayleigh thermiques.

La figure 5.5 représente les effets de la variation du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$  sur le seuil de l'apparition de la convection  $Ra_c$  et le nombre d'onde correspondant  $\alpha_c$ . Cette figure montre que le nombre de Rayleigh critique diminue avec l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique pour tous les nombres de Peclet. Cependant, nous pouvons constater que pour des nombres de Peclet supérieurs à 5, le nombre d'onde critique  $\alpha_c$  diminue avec l'augmentation de  $Ra_T$ , et pour les nombres de Peclet inférieurs à 5, le nombre d'onde critique  $\alpha_c$  augmente avec l'augmentation de  $Ra_T$ . Pour  $Pe = 5$  il n'y a pas de grande influence du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$  sur le nombre d'onde critique. Ceci est dû au fait qu'à  $Pe = 5$ , le nombre d'onde critique  $\alpha_c$  de la bioconvection est presque égal à celui du cas purement isotherme.

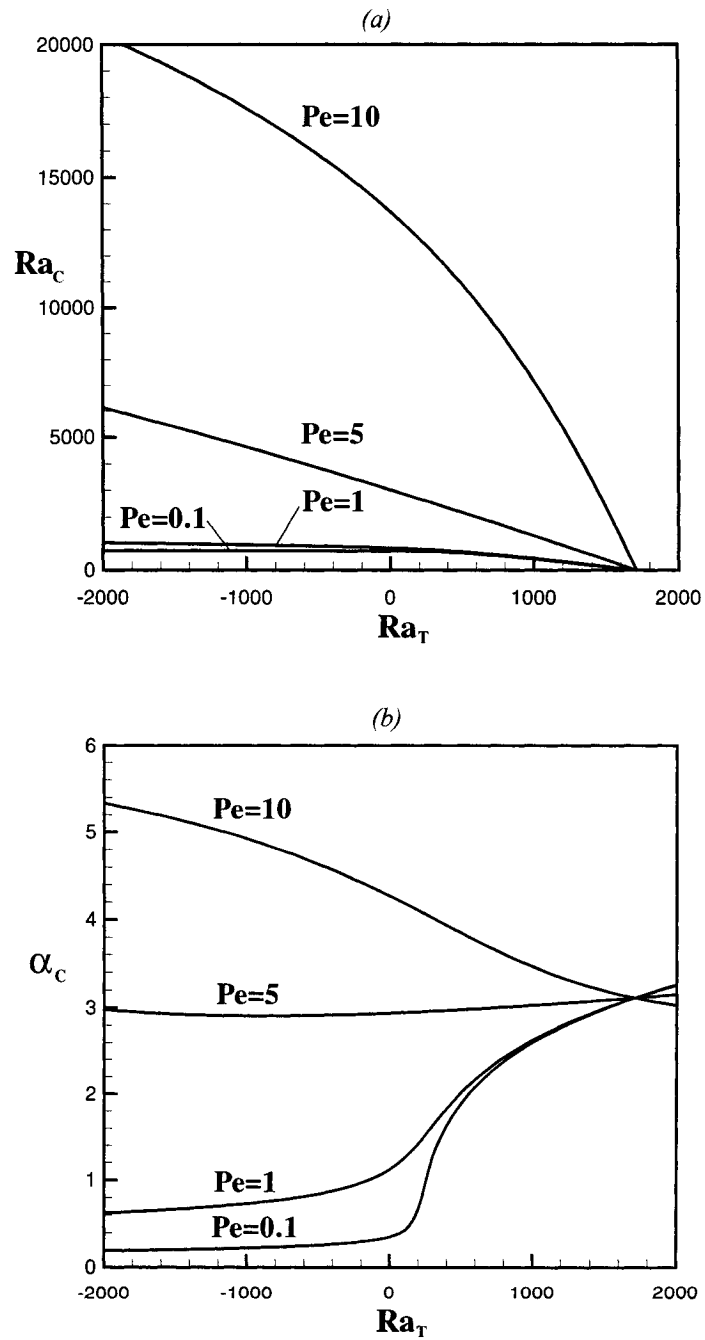


Figure 5.5 : Effet du nombre de Rayleigh thermique sur; (a) le nombre de Rayleigh critique de bioconvection, (b) le nombre d'onde critique correspondant, pour différents nombres de Peclet

Nous présentons sur la figure 5.6 la variation du nombre de Rayleigh critique de bioconvection  $Ra_c$  avec le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$  pour le cas limite  $Pe=0$ . Ce résultat est similaire à celui trouvé par Nield and Kuznetsov (2006). Ce cas représente le problème de double diffusion dans une couche fluide soumise à un flux de masse constant.

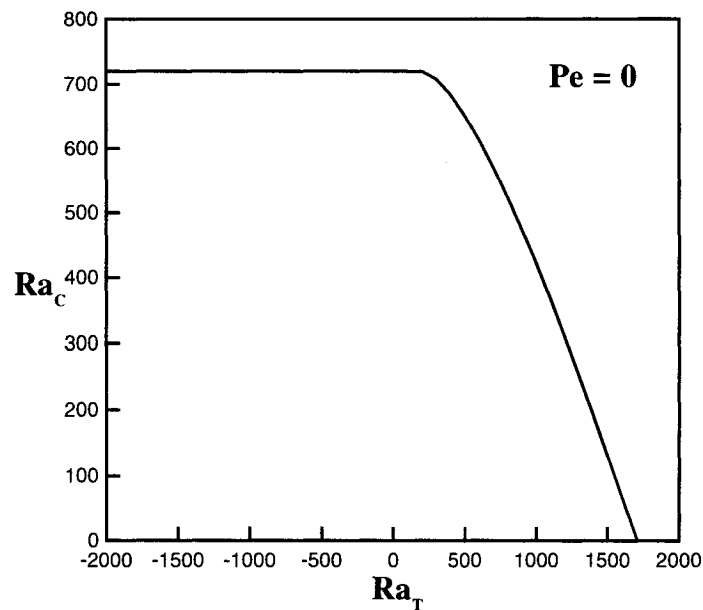


Figure 5.6 : Nombre de Rayleigh critique de bioconvection  $Ra_c$  en fonction du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$  pour le cas  $Pe = 0$

Nous présentons sur les figures 5.7 et 5.8 les lignes de courant, les isoconcentrations et les isothermes au début de la convection pour deux valeurs du nombre de Peclet  $Pe = 1$  et  $Pe = 10$ , et pour trois valeurs du nombre de Rayleigh thermiques  $Ra_T = -1000$ , 0 et 1000. Ces figures montrent la grande influence du nombre de Rayleigh thermique sur la forme des cellules convectives et sur la distribution de concentration des microorganismes pour les deux cas  $Pe = 1$  et  $Pe = 10$ . En effet dans le cas de  $Pe = 1$  nous constatons que lorsque le nombre de Rayleigh thermique augmente, la longueur d'onde des cellules convectives diminue. Par contre pour le nombre de Peclet  $Pe = 10$

cette tendance s'inverse, c'est-à-dire que la longueur d'onde des cellules convectives augmente lorsque le nombre de Rayleigh thermique augmente.

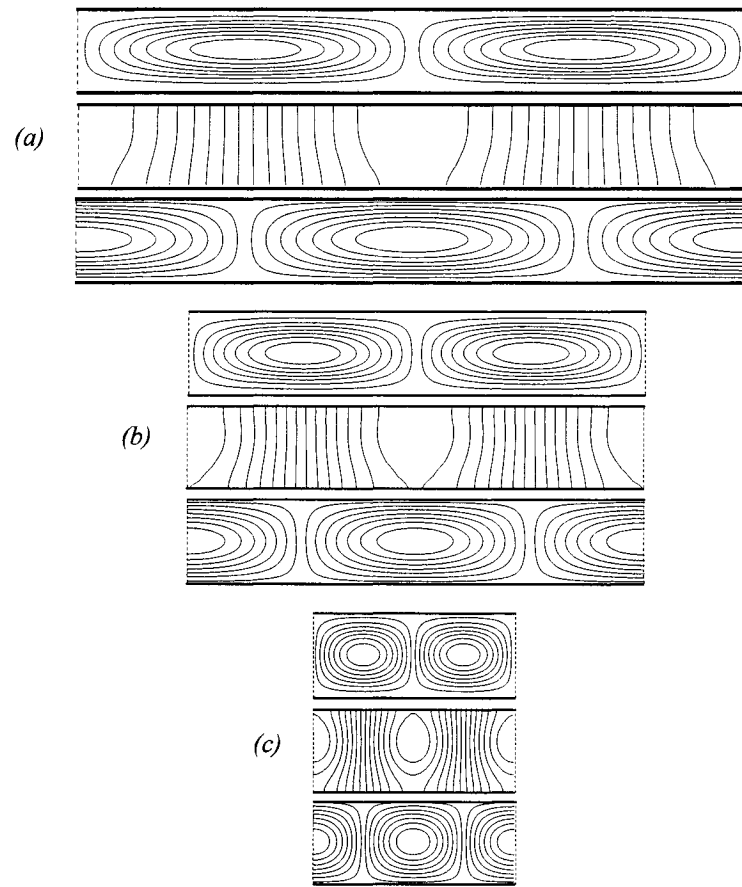


Figure 5.7 : Lignes de courant (en haut), isoconcentration (au centre) et isothermes (en bas) pour  $Pe = 1$  ; (a)  $Ra_T = -1000$  , (b)  $Ra_T = 0$  , (c)  $Ra_T = 1000$

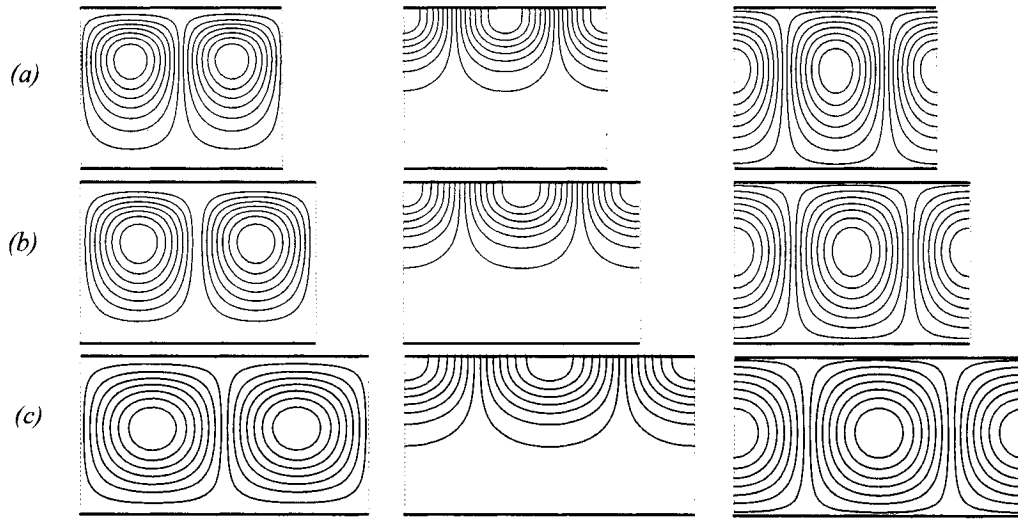


Figure 5.8 : Lignes de courant (à gauche), isoconcentration (au centre) et isothermes (à droite) pour  $Pe = 1$  ; (a)  $Ra_T = -1000$  , (b)  $Ra_T = 0$  , (c)  $Ra_T = 1000$

### 5.3 Solution numérique

Les résultats présentés dans cette section sont obtenus en résolvant les équations de (2.41) et (2.44) pour une cavité carrée en utilisant le concept des volumes de contrôle présenté dans le chapitre 2.

#### 5.3.1 Validation du code numérique

Le code de calcul est validé en utilisant un cas de double diffusion de la littérature (Mamou et al. 2001). Le cas considéré est une cavité rectangulaire avec les grandeurs adimensionnelles suivant :  $A = 1.5$ ,  $Ra_T = 40000$ ,  $Ra_S = -10^5$ ,  $Pr = 1$  et  $Le = 10^{1/2}$ . Les résultats ont montré que notre code reproduit exactement les isovaleurs de  $\psi$ ,  $T$  et  $S$ , malgré le fait que l'étude de Mamou et al. (2001) est basée sur la méthode des éléments finis, tandis que la notre est basée sur la méthode des volumes finis. Le tableau 5.1



montre une très bonne concordance entre nos résultats et ceux de Mamou et al. (2001) en terme de  $\psi_{\max}$ ,  $\psi_{\min}$ ,  $Nu_m$  et  $Sh_m$ .

Tableau 5.1: Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum, nombre de Nusselt et nombre de Sherwood avec les résultats de Mamou et al. (2001) pour  $A = 1.5$ ,  $Ra_T = 40000$ ,  $Ra_S = -10^5$ ,  $Pr = 1$ ,  $Le = 10^{1/2}$ .

	$\psi_{\max}$	$\psi_{\min}$	$Nu_m$	$Sh_m$	$N_x \times N_y$	$\Delta t$
Mamou et al. (2001)	10.126	-10.126	2.546	3.741	24x20	$2 \times 10^{-4}$
Présente étude	10.090	-10.090	2.533	3.726	61x41	$10^{-3}$
Variation (%)	0.36	0.36	0.51	0.40		

Dans la présente étude, le domaine de calcul est discrétisé avec un maillage uniforme. La précision des résultats dépend évidemment de la finesse du maillage. En utilisant différents maillages, des tests numériques ont été effectués pour voir l'effet du maillage. Le problème de la bioconvection dans une cavité carrée avec  $Pe=10$ ,  $Sc=1$ ,  $Ra=1000$  et sans effets thermiques a été considéré. Les résultats pour des maillages variant de  $21 \times 21$  à  $81 \times 81$  sont présentés sur le tableau 5.2. D'après ces résultats nous constatons que la variation entre les deux derniers cas est moins de  $3.5 \times 10^{-4}$ , qui est une valeur négligeable. Ainsi, le maillage de  $61 \times 61$  a été choisi pour notre étude.

Tableau 5.2: Effet du maillage sur les valeurs maximales de la fonction de courant et la concentration pour  $Ra = 1000$ ,  $Ra_T = 0$ ,  $Pe = 10$ ,  $Sc = 1$ .

$N_x \times N_y$	21x21	41x41	61x61	81x81
$\psi_{\max}$	5.559	5.572	5.577	5.579
$n_{\max}$	21.061	18.059	17.239	17.082

### 5.3.1 Résultats et discussion

Les résultats ont été obtenus pour les valeurs des paramètres de contrôle suivant :  $Sc = 1$ ,  $Le = 1$  et  $Pe = 10$  avec  $Ra$  et  $Ra_T$  variables. Un maillage de  $\Delta x = \Delta y = 0.016$  et un pas de temps  $\Delta t = 0.001$  avec une tolérance de  $\varepsilon = 10^{-6}$  ont été utilisés dans les calculs.

La figure 5.9 montre la courbe de bifurcation ( $\psi_{\max}$  en fonction de  $Ra_T$ ) pour une cavité carrée dans le cas  $Ra = 0$  (il n'y a pas de bioconvection), ce cas correspond au cas purement thermique. Le résultat présenté sur la figure 5.9 illustre bien la bifurcation supercritique de la convection à partir de l'état de conduction. Le nombre de Rayleigh critique de l'apparition de la convection est égal à 1708, cette valeur correspond à la valeur critique d'une couche infinie chauffée pas le bas à une température constante. Cette configuration correspond donc au cas classique de la convection de Bénard.

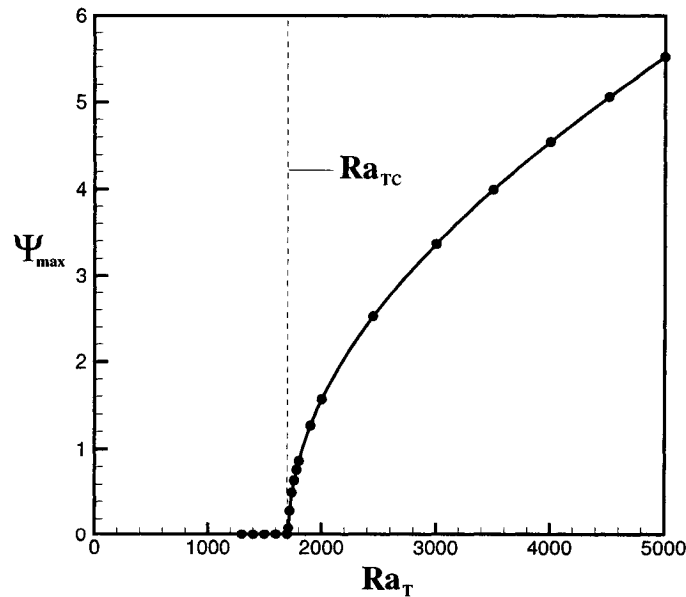


Figure 5.9: Diagramme de bifurcation : variation de  $\psi_{\max}$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $Ra = 0$  (pas de bioconvection).

Sur la figure 5.10 nous avons tracé la courbe de bifurcation ( $\psi_{\max}$  en fonction de  $Ra$ ) pour une cavité carrée dans le cas  $Ra_T = 0$  (il n'y a pas d'effet thermique). Ces courbes sont obtenues comme dans le chapitre 3 et 4, c'est-à-dire nous débutons les simulations avec l'état de diffusion pure ( $Ra=0$ ), ensuite nous prenons cette solution diffusive comme condition initiale pour simuler un cas avec un nombre de Rayleigh plus grand et ainsi de suite. Cette procédure est répétée jusqu'à l'obtention de la solution convective. Après l'obtention de la solution convective, nous prenons cette solution comme condition initiale pour simuler un cas avec un nombre de Rayleigh plus petit et ainsi de suite jusqu'à avoir l'état de diffusion. Similairement au cas de la bioconvection gravitactique traitée dans le chapitre 3 pour la configuration d'un cylindre vertical, nous constatons bien que la bifurcation est souscritique dans ce cas aussi.

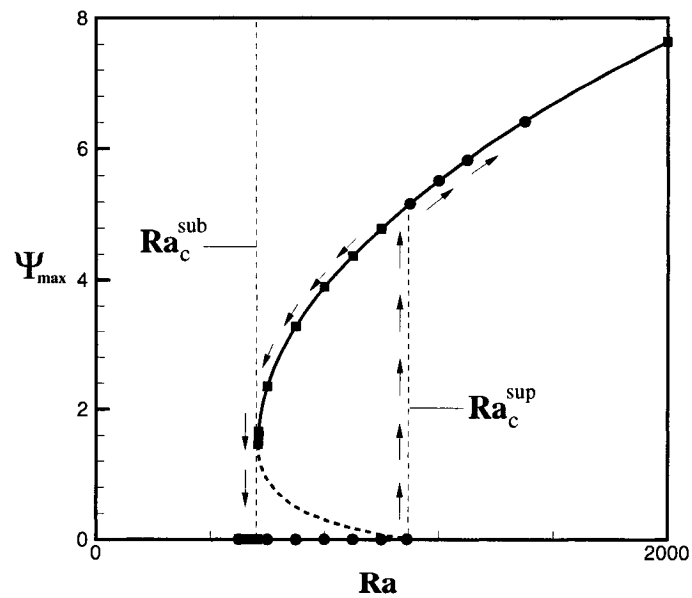


Figure 5.10: Diagramme de bifurcation : variation de  $\psi_{\max}$  en fonction de  $Ra$  pour  $Ra_T = 0$  (pas d'effet thermique).

Pour voir l'effet du chauffage par le bas sur le développement de la bioconvection et sur la courbe de bifurcation, nous avons tracé sur la figure 5.11 les courbes de bifurcation pour différents nombres de Rayleigh thermique  $Ra_T = 0, 500, 1000$  et  $1708$ . Il apparaît de cette figure que pour  $Ra_T = 0$  la courbe de bifurcation est fortement souscritique comme nous avons déjà montré sur la figure 5.10. Cependant, lorsque le nombre de Rayleigh thermique augmente nous constatons que la courbe de bifurcation change en se décalant vers la gauche. En effet, pour  $Ra_T = 500$  la valeur du nombre de Rayleigh sous critique est inférieure à celle du cas  $Ra_T = 0$ . Nous constatons aussi que la courbe de bifurcation pour  $Ra_T = 500$  descend un peu plus bas que celle du cas isotherme. Pour  $Ra_T = 1000$  la courbe de bifurcation décroît jusqu'à l'axe des  $Ra$  et la bifurcation devient alors supercritique. Sur la figure 5.11 nous pouvons voir que la courbe de  $Ra_T = 1708$  passe par le point d'origine de notre repère ( $\psi_{\max} = 0, Ra = 0$ ). Nous pouvons donc conclure que lorsque le chauffage par le bas aide au développement de la convection et change la bifurcation sous critique progressivement pour la rendre supercritique.

Sur la figure 5.12 nous représentons les courbes de bifurcation pour différents nombres de Rayleigh thermique  $Ra_T = 0, -1000, -2000$  et  $-3000$  dans le cas du refroidissement par le bas. Contrairement au cas du chauffage par le bas, nous pouvons remarquer que lorsque le nombre de Rayleigh thermique diminue et la bifurcation reste souscritique. Le refroidissement par le bas a un effet stabilisateur puisque les nombres de Rayleigh sous critiques augmentent lorsque le nombre de Rayleigh thermique diminue.

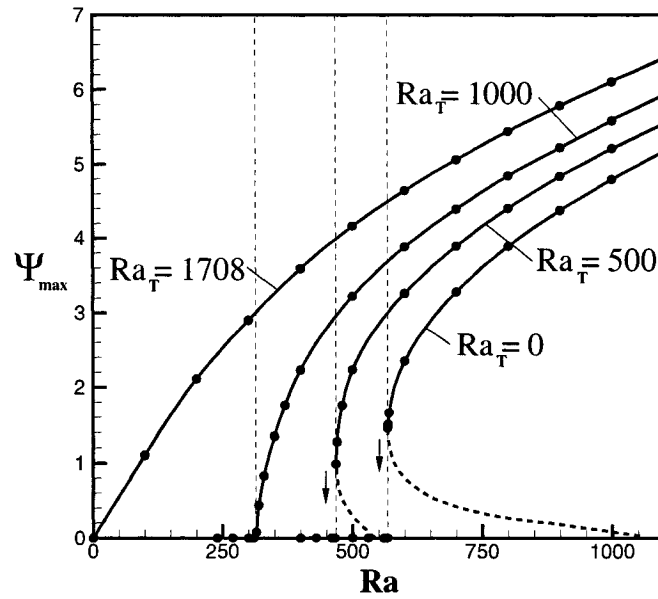


Figure 5.11: Diagramme de bifurcation  $\psi_{\max}(Ra)$  pour  $Ra_T = 0, 500, 1000$  et  $1708$

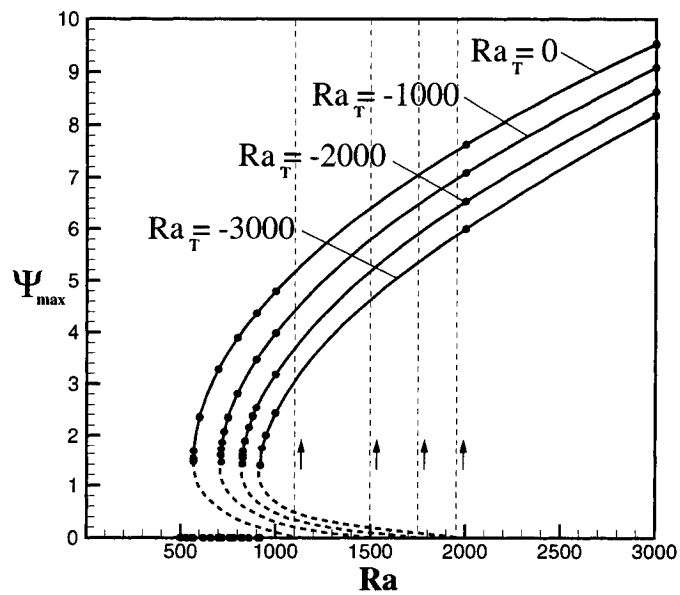


Figure 5.12: Diagramme de bifurcation  $\psi_{\max}(Ra)$  pour  $Ra_T = 0, -1000, -2000$  et  $-3000$

Pour examiner l'écoulement et la concentration des microorganismes durant la transition de l'état souscritique à l'état supercritique, nous avons tracé sur la figure 5.13 les lignes de courant, isoconcentrations et isothermes au seuil souscritique ( $Ra = Ra^{sub}$ ) pour  $Ra_T = 0, 500$  et  $1000$ . Pour le cas isotherme (figure 5.13a) la cellule convective est asymétrique et elle est décalée vers le coin droit de la cavité où se concentrent les microorganismes. Les isothermes montrent un régime de quasi-convection suivant la même tendance des lignes de courant. Pour  $Ra_T = 1000$ , le régime est presque diffusif pour la concentration et les isothermes sont presque horizontales et la cellule de convection est symétrique par rapport à l'axe vertical de la cavité.

L'effet du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$  sur le nombre de Rayleigh souscritique  $Ra_c^{sub}$  est représenté sur la figure 5.14. Nous constatons que le nombre de Rayleigh souscritique diminue avec l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique, ce qui veut dire que l'augmentation du gradient de température déstabilise la suspension et aide au développement de la bioconvection.

Pour voir l'influence du chauffage par le bas ou le refroidissement par le bas sur l'écoulement convectif et sur la distribution de concentration à l'intérieur de la cavité, nous avons tracé sur la figure 5.15 les fonctions de courant, les isoconcentrations et les isothermes pour une cavité carrée avec un Rayleigh de bioconvection  $Ra = 10^3$  pour trois différent cas ; le cas d'un chauffage par le bas avec  $Ra_T = 4 \times 10^3$  (figure 5.15a), le cas isotherme avec  $Ra_T = 0$  (figure 5.15b) et le cas d'un refroidissement par le bas avec  $Ra_T = -4 \times 10^3$  (figure 5.15c).

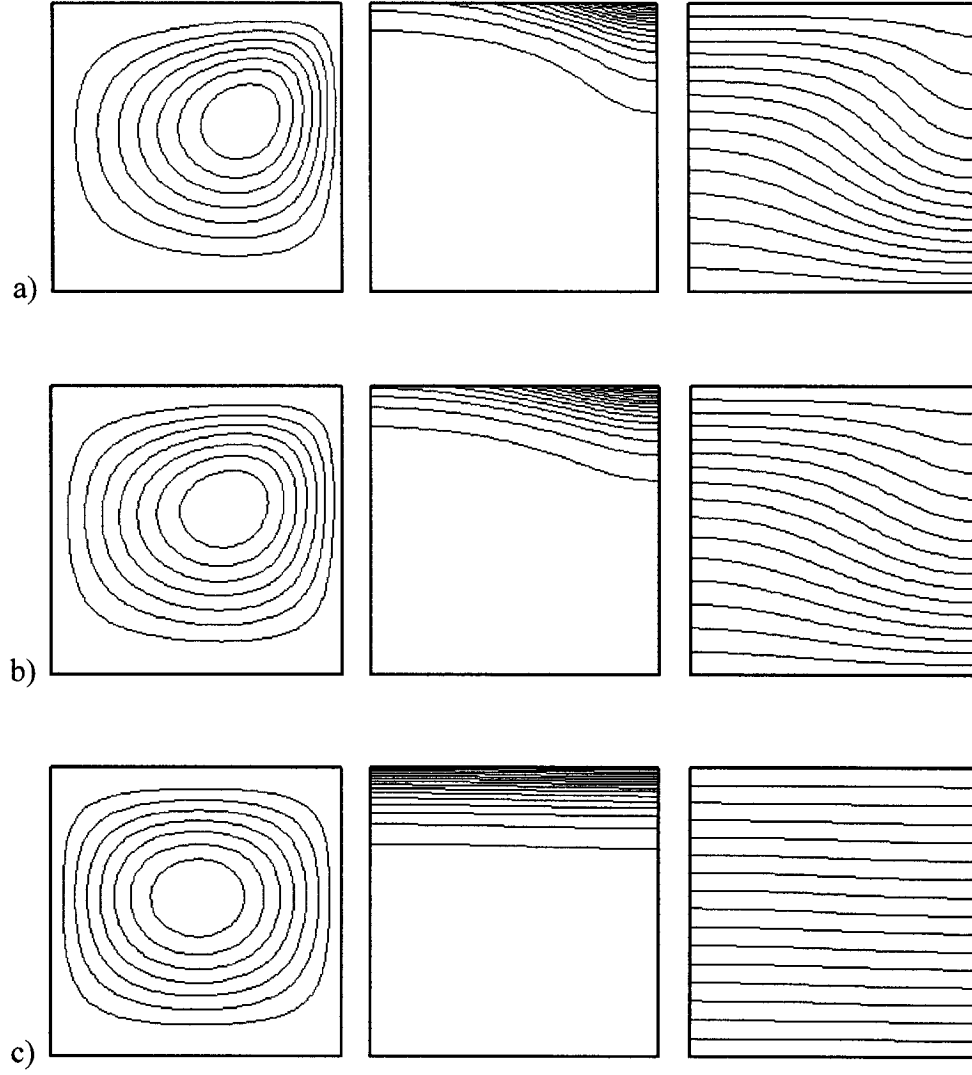


Figure 5.13: Lignes de courant, isoconcentration et isothermes au Rayleigh souscritique:

a)  $Ra_T = 0$ ,  $Ra_c^{sub} = 567$ ,  $\psi_{max} = 1.46$ , b)  $Ra_T = 500$ ,  $Ra_c^{sub} = 468$ ,  $\psi_{max} = 0.99$ , c)

$$Ra_T = 1000, Ra_c^{sub} = 315, \psi_{max} = 0.08$$

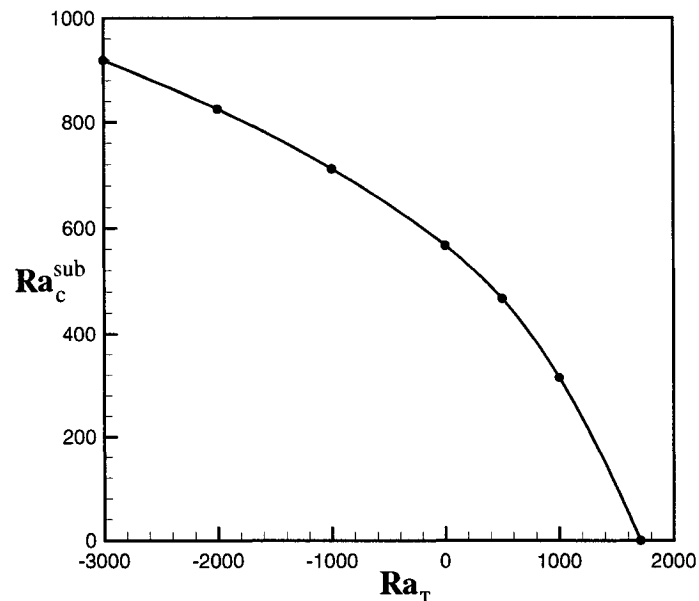


Figure 5.14: Effet du nombre de Rayleigh thermique sur le nombre de Rayleigh souscritique de bioconvection.

La figure 5.15a montre que le chauffage par le bas tend à renforcer l'écoulement. En effet, la valeur maximum de la fonction de courant est plus grande que celle où il n'y a pas de chauffage et la cellule convective est décalée vers le centre de la cavité. Cependant pour le cas du refroidissement par le bas (figure 5.15c) la valeur maximum de la fonction de courant est plus faible par rapport au cas isotherme, ce qui veut dire que l'écoulement est affaibli et la cellule convective est décalée vers la droite en haut de la cavité. Les profils horizontaux et verticaux à mi-hauteur ( $y = 0.5$ ) et mi-largeur ( $x = 0.5$ ) de la figure 5.15 sont représentés sur la figure 5.16. Les figures 5.16a et 5.16d montrent que ces profils deviennent asymétriques lorsque le refroidissement par le bas est appliqué. Par contre, nous constatons que le chauffage par le bas tend à centrer la cellule convective à l'intérieur de la cavité et rend ainsi les profils symétriques. Les figures 5.16b et 5.16e montrent que le gradient de concentration de microorganismes est plus fort à côté de la paroi supérieure, avec un maximum dans le coin droit de la cavité. Notons que sous l'effet du refroidissement par le bas, le profil vertical de température



devient presque linéaire et s'approche de l'état de conduction pure (figure 5.16f). Les isothermes deviennent ainsi presque des lignes horizontales (figure 5.15c).

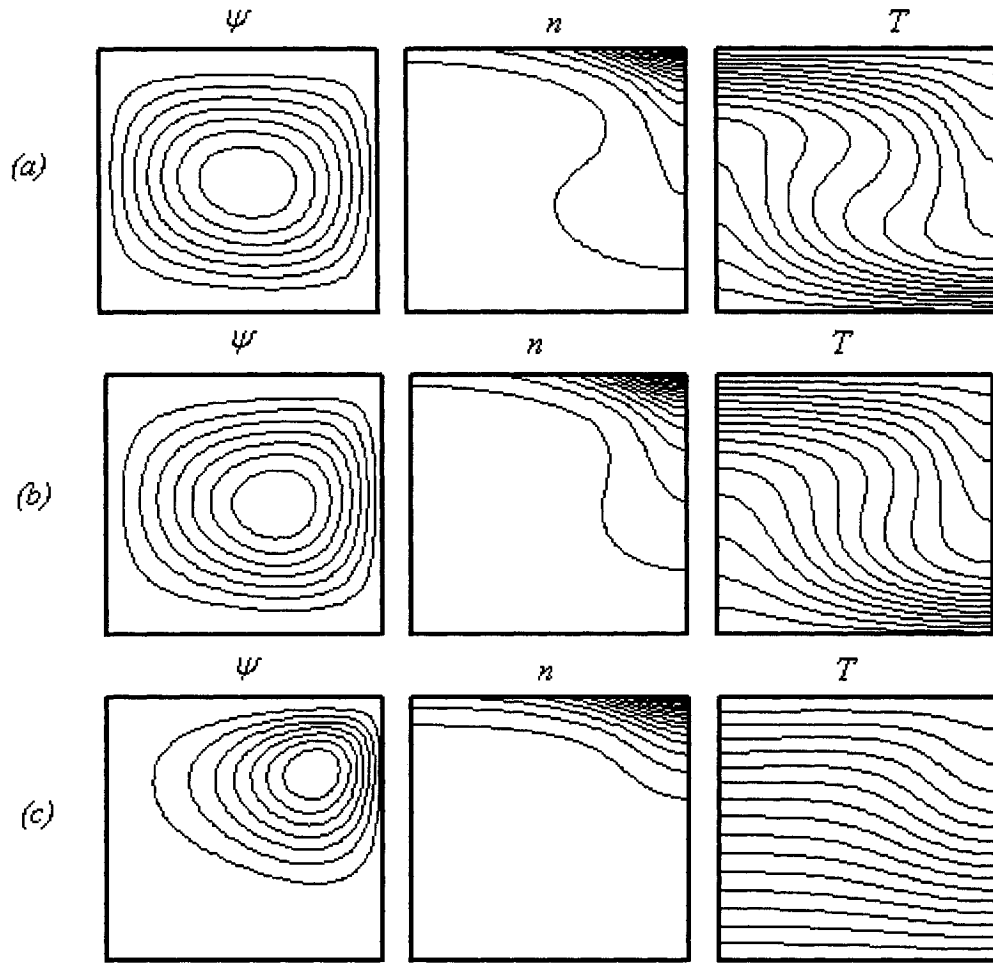


Figure 5.15: Lignes de courant, isoconcentration et isothermes pour  $Ra = 10^3$  ;

(a)  $Ra_T = 4 \times 10^3$ ,  $\psi_{\max} = 7.63$ , (b)  $Ra_T = 0$ ,  $\psi_{\max} = 4.97$ , (c)  $Ra_T = -4 \times 10^3$ ,

$$\psi_{\max} = 1.35$$

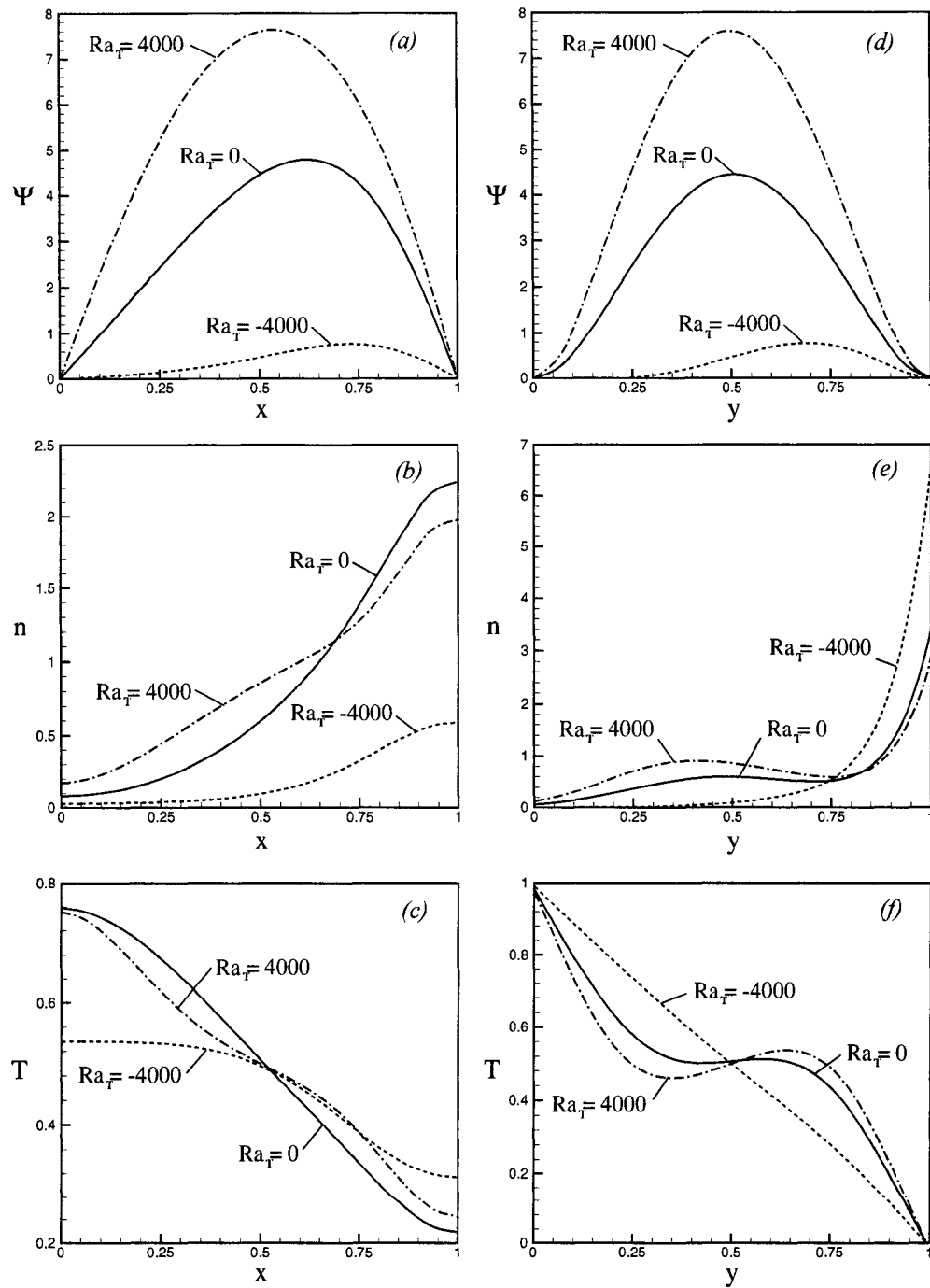


Figure 5.16: Effet du nombre de Rayleigh thermique sur les profils horizontaux et verticaux à mi-hauteur ( $y = 0.5$ ) et mi-largeur ( $x = 0.5$ ) de la cavité pour  $Ra = 10^3$

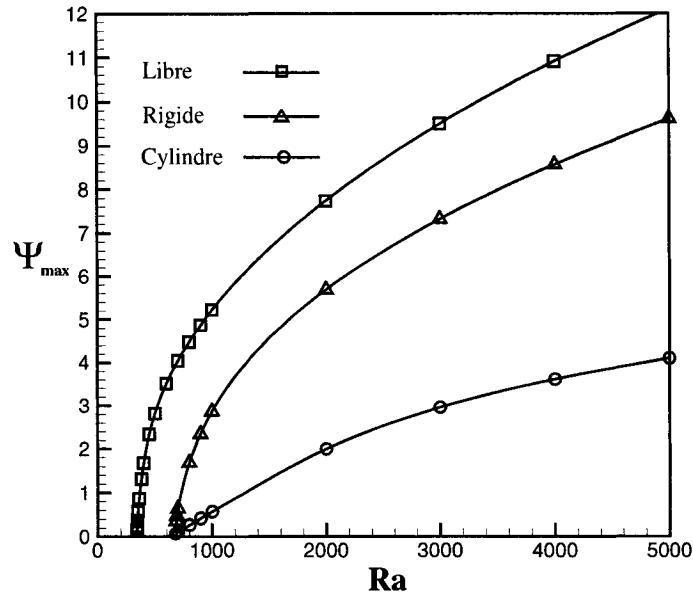


Figure 5.17: Effet des parois verticales rigides et effet de courbure sur le diagramme de bifurcation  $\psi_{\max}(Ra)$  pour  $Ra_7 = 1000$ .

L'effet des parois verticales rigides et l'effet de la courbure sont représentés sur la figure 5.17. Il apparaît clairement de cette figure que les parois latérales rigides freinent l'écoulement et par conséquent diminue la valeur de la fonction de courant à un Rayleigh donné. Pour le cas d'un cylindre vertical avec le même facteur de forme, l'intensité de l'écoulement est encore plus faible à cause de la géométrie restrictive cylindrique.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié une suspension de microorganismes gravitactiques soumise à un gradient de température vertical. La théorie de la stabilité linéaire a été utilisée pour déterminer les seuils critiques de l'apparition de la convection en fonction du gradient thermique appliqué. Les résultats sont obtenus pour les valeurs du nombre

de Peclet  $Pe$  de 0.1 à 10 et pour les nombres de Rayleigh thermiques  $Ra_T$  de -2000 jusqu'à 2000. Nous avons constaté que les effets thermiques peuvent stabiliser ou déstabiliser la suspension, et diminuer ou augmenter la longueur d'onde des cellules bioconvectives. Nous avons constaté aussi que le refroidissement ou le chauffage par le bas a un grand effet sur l'écoulement convectif à l'intérieur de la cavité, et n'a pas de grand effet cependant sur la distribution de concentration à l'intérieur de la cavité. Le gradient de concentration est maximum près de la paroi supérieure et minimum en bas de la cavité. Le chauffage par le bas déstabilise la suspension et rend la bifurcation supercritique, par contre le refroidissement par le bas stabilise la suspension et la bifurcation reste sous critique.

## CONCLUSION

Cette thèse porte principalement sur l'étude de la stabilité et la simulation numérique de la bioconvection gravitactique en milieu fluide. Le travail présenté dans cette étude nous a permis de mettre en évidence une analogie entre le phénomène de bioconvection et la convection naturelle en présence d'un écoulement vertical traversant, ce qui nous a conduit à considérer ce problème pour éclaircir certains points jusqu'ici non abordés. La formulation mathématique du problème de la bioconvection gravitactique a été basée sur le modèle continu de Childress et al. (1975), qui est le plus utilisé dans la littérature. Dans ce modèle, les équations de base régissant l'écoulement et le transfert de masse sont : l'équation de conservation de masse, l'équation de conservation de quantité de mouvement avec l'approximation de Boussinesq et l'équation de conservation de cellules. Dans le cas de la convection naturelle en présence d'un écoulement traversant, la formulation mathématique est basée sur le modèle classique de Darcy et l'équation de conservation d'énergie.

Au cours de notre étude, deux méthodes principales de résolution ont été employées, la méthode de stabilité linéaire et la méthode numérique basée sur le concept des volumes finis. La théorie de stabilité linéaire nous a permis d'établir les seuils critiques de l'apparition de la convection, ainsi que le développement des perturbations au début de la convection. La méthode des différences finies a été utilisée pour discrétiser les équations gouvernantes. La comparaison de nos résultats à ceux de la littérature nous a permis de valider notre code numérique.

L'utilisation de la méthode des volumes finis nécessite toutefois une puissance informatique considérable. En effet, le temps de calcul est le facteur critique lors d'une simulation numérique, surtout lorsque nous approchons la valeur du seuil critique du

déclenchement de la convection. Ceci est dû au fait que près du seuil critique, le taux de croissance des perturbations est très faible, ce qui engendre des temps de calcul très grand pour atteindre la convergence. Dans un premier temps nous avons validé notre programme numérique de simulation avec la solution analytique de l'état de diffusion. Il s'est avéré qu'il faut augmenter le nombre de nœud du maillage dans la direction vertical lorsque le nombre de Peclet augmente pour avoir des résultats consistants. Puisque notre programme est basé sur un maillage uniforme, nous n'avons pas eu la possibilité de faire un raffinage local de maillage, ce qui nous aurait permis de réduire le nombre de nœuds total et d'accélérer ainsi la convergence des calculs.

En premier lieu, l'étude de la bioconvection gravitactique dans un cylindre vertical a permis d'examiner le développement de la convection en fonction des paramètres de contrôle du problème qui sont le nombre de Rayleigh de bioconvection, le nombre de Peclet et le rapport de forme du cylindre. Les seuils critiques de l'apparition de la convection ont été déterminés en traçant l'intensité de l'écoulement en fonction du nombre de Rayleigh pour différents nombres de Peclet et pour deux rapports de forme de la cavité. Les résultats montrent que lorsque le nombre de Peclet est suffisamment petit, le phénomène de bioconvection gravitactique est analogue à la convection de Bénard. Cependant lorsque le nombre de Peclet augmente, le développement de la bioconvection est très différent de la convection de Bénard. Tandis que l'instabilité de la convection de Bénard est supercritique, la bioconvection gravitactique est une instabilité souscritique.

En second lieu, la convection naturelle dans une couche poreuse en présence d'un écoulement vertical traversant a été considéré. Le cas des parois isothermes a été traité. La théorie de stabilité linéaire a été utilisée pour déterminer les seuils critiques de l'apparition de la convection. Nous avons constaté que l'écoulement traversant a un effet stabilisateur sur le développement de la convection. Nous avons constaté aussi que le nombre d'onde critique augmente avec le nombre de Peclet. Nous avons ensuite tracé les courbes de bifurcation pour une cavité horizontale allongée à l'aide du programme de

simulation numérique basé sur la méthode des volumes finis. Nos résultats numériques ont été comparés avec ceux de la stabilité linéaire en terme du nombre de Rayleigh supercritique et ont montré une très bonne concordance. Tout comme la bioconvection gravitactique, les résultats numériques ont démontré l'existence d'une instabilité souscritique. Les résultats de Homsy et Sherwood (1976) basés sur la méthode d'énergie s'accordent avec cette conclusion.

Enfin, nous avons étudié l'effet d'un gradient thermique vertical sur la bioconvection dans une suspension de microorganismes gravitactiques. Le problème est gouverné dans ce cas par plusieurs paramètres adimensionnels qui sont, le nombre de Rayleigh de bioconvection,  $Ra$ , le nombre de Rayleigh thermique,  $Ra_T$ , le nombre de Schmidt,  $Sc$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , et le nombre de Peclet,  $Pe$ . Nous avons utilisé la stabilité linéaire pour déterminer les seuils critiques de l'apparition de la convection en fonction du gradient thermique appliqué. Nous avons constaté que les effets thermiques stabilise la suspension lorsque le refroidissement par le bas est appliqué, tandis que le chauffage par le bas déstabilise la suspension et aide à la formation de la bioconvection. Nous avons constaté aussi que la longueur d'onde critique de l'apparition de la convection varie avec le nombre de Rayleigh thermique. Dans le cas des nombres de Peclet inférieurs à 5, le nombre d'onde augmente avec le nombre de Rayleigh thermique, par contre pour les nombres de Peclet supérieurs à 5, le nombre d'onde diminue avec le nombre de Rayleigh thermique. Par la suite, les équations qui régissent le phénomène de la thermo-bioconvection ont été résolues à l'aide d'un code numérique basé sur la méthode des volumes de contrôle. Le code utilisé a été validé par les résultats de la double diffusion de la littérature. La configuration géométrique du modèle physique est une cavité contenant une suspension de microorganismes gravitactique soumise à un gradient vertical de température. Les deux cas du chauffage ou le refroidissement par le bas ont été considérés. Les courbes de bifurcation ont été tracées pour différents nombres de Rayleigh thermique confirment que les effets thermiques peuvent stabiliser ou déstabiliser la suspension suivant que nous appliquons un refroidissement ou un

chauffage par le bas. La bifurcation reste toutefois souscritique dans le cas du refroidissement par le bas. Cependant, nous avons observé une transition de la bifurcation souscritique à une bifurcation supercritique lorsque le chauffage par le bas est appliqué.

Dans la perspective d'études futures, il serait intéressant de considérer les points suivants :

- L'utilisation de la stabilité non linéaire pour étudier le régime sous critique.
- La modélisation tridimensionnelle de la bioconvection.
- Étudier les différents modes de convection dans les cavités allongées.
- Étudier la thermo-bioconvection de façon plus détaillé en fonction des paramètres de control du système, notamment le nombre de Lewis.



## RÉFÉRENCES

ALLOUI, Z., NGUYEN, T.H. and BILGEN, E. (2005). Bioconvection of gravitactic microorganisms in a vertical cylinder, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 32, 739-747.

ALLOUI, Z., NGUYEN-QUANG, T., NGUYEN, T.H., LE PALEC, G. and BOURNOT, P. Onset of convection in a porous cavity with vertical throughflow, 12 Journées Internationales de Thermique, 77-80, Maroc 2005.

ALLOUI, Z., NGUYEN, T.H. and BILGEN, E. (2006a). Stability analysis of thermo-bioconvection in a suspension of gravitactic microorganisms in a fluid layer, Int. Comm. Heat and Mass Transfer, accepted for publication.

ALLOUI, Z., NGUYEN, T.H. and BILGEN, E. (2006b). Numerical investigation of thermo-bioconvection in a suspension of gravitactic microorganisms, Int. J. Heat Mass Transfer, accepted for publication.

BAHLOUL, A., NGUYEN-QUANG, T. and NGUYEN, T. H. (2004). Bioconvection of gravitactic microorganisms in fluid layer, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 32, 64-71.

BEES, M. A. and HILL, N. A., (1997). Wavelengths of bioconvection patterns, Journal of Experimental Biology, 200, 10, 1515.

CHEN, F., (1990). Throughflow effect on convective instability in superposed fluid and porous layer, J. Fluid Mech., 231, 113–133.

CHILDRRESS, S., (1981). Mechanics of Swimming and Flying, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

CHILDRRESS, S., LEVANDOWSKY, M., and SPIEGEL, E.A., (1975). Pattern formation in a suspension of swimming microorganisms: equation and stability theory. J. Fluid Mech., 63, 591.

CHILDRRESS, S. and PEYRET, R., (1976). A numerical study of two-dimensional convection by motile particles, Journal de Mécanique, 15, 5, 753.

FUJITA, S.I. and WATANABE, M., (1986). Transition from periodic to non-periodic oscillation observed in a mathematical model of bioconvection by motile microorganisms, Physica D: Nonlinear Phenomena, 20, 435.

GENG, P. and KUZNETSOV, A.V., (2005). Settling of bidispersed small solid particles in a dilute suspension containing gyrotactic microorganisms, International Journal of Engineering Science, 43, 992-1010.

GENG, P. and KUZNETSOV, A.V. (2004). Effect of small solid particles on the stability of bioconvection plumes. Int. Comm. Heat Mass Transfer, 31, 5, 629-638.

GHORAI, S., and HILL, N.A., (1999). Development and stability of gyrotactic plumes in bioconvection, J. Fluid Mech., 400, 1-33.

GHORAI, S., and HILL, N.A., (2000a). Wavelengths of Gyrotactic Plumes in Bioconvection, Bulletin of Mathematical Biology, 62, 3, 429-451.

GHORAI, S., and HILL, N.A., (2000b). Periodic arrays of gyrotactic plumes in bioconvection, Physics of Fluids, 12, 1, 5-23.

GHORAI, S., and HILL, N.A., (2002). Axisymmetric Bioconvection in a Cylinder, Journal of Theoretical Biology, 219, 2 , 137-153.

HARASHIMA, A., WATANABE, M. and FUJISHIRO, I., (1988). Evolution of bioconvection patterns in a culture of motile flagellates, Phys. Fluids, 31, 4, 764.

HILL, N.A. and PEDLEY, T.J., (2005). Bioconvection, Fluid Dynamics Research, 37, 1-20.

HILL, N.A., PEDLEY, T.J. and KESSLER, J.O., (1989). The growth of bioconvection patterns in a suspension of gyrotactic microorganisms in a layer of finite depth, J. Fluid Mech. 208, 509-543.

HILLEDON, A.J. and PEDLEY, T.J., (1996). Bioconvection in suspensions of oxytactic bacteria linear theory, J. Fluid Mech., 324, 223-261.

HOMSY, G.M. and A.E., SHERWOOD, (1976). Convective instabilities in porous media with throughflow, AIChE Journal, 22, 1, 168–174.

HOPKINGS, M.M. and FAUCI, L.J., (2002). A computational model of the collective fluid dynamics of motile microorganisms, J. Fluid Mech., 455, 149-174.

ITOH, A. et TOIDA, H., (2001). Control of bioconvection and its mechanical application, IEEE/ASME Int. Conf. on Adv. Intel. Mech. Proc. 8-12 July Como, Italy, 1220-1225.

JONES, M.C. and PERSICHETTI, J.M., (1986). Convective instabilities in packed bed with throughflow, AIChE Journal, 32, 9, 1555–1557.

KELLER, E.F. and SEGEL, L.A., (1970). Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, Journal of Theoretical Biology, 26, 399-415.

KUZNETSOV, A.V., (2005a). The onset of bioconvection in a suspension of gyrotactic microorganisms in a fluid layer of finite depth heated from below, Int. Comm. Heat and Mass Transfer, 32, 574.

KUZNETSOV, A.V., (2005b). Thermo-bioconvection in a suspension of oxytactic bacteria, Int. Comm. Heat and Mass Transfer, 32, 991-999.

KUZNETSOV, A.V., (2005c). Investigation of the onset of thermo-bioconvection in a suspension of oxytactic microorganisms in a shallow fluid layer heated from below, Theor. Comput. Fluid Dyn., 19, 287-299.

KUZNETSOV, A.V. and AVRAMENKO, A.A., (2004). Effect of small particles on the stability of bioconvection in a suspension of gyrotactic microorganisms in a layer of finite depth, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 31, 1, 1-10.

KUZNETSOV, A.V. and JIANG, N., (2001). Numerical investigation of bioconvection of gravitactic microorganisms in an isotropic porous medium, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 28, 7, 877-886.

LEVANDOWSKY., M., CHILDRESS, W.S., SPIEGEL, E.A. and HUTHNER S.H., (1975). A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms. J. Protozool, 22, 296.

MAMOU, M., VASSEUR, P. and HASNAOUI, M., (2001). On numerical stability analysis of double-diffusive convection in confined enclosures, J. Fluid Mech., 433, 209-250.

METCAFE, A.M. and PEDLEY, T.J., (2001). Falling plumes in bacterial bioconvection, J. Fluid Mech., **445**, 121-151.

MOGAMI, Y., YAMANE, A., GINO, A. and BABA, S.A., (2004). Bioconvective pattern formation of *Tetrahymena* under altered gravity, The Journal of Experimental Biology, **207**, 3349-3359.

NIELD, D.A., (1998). Convection in a porous medium with inclined temperature gradient and vertical throughflow, Int. J. of Heat Mass Transfer, **41**, 1, 241-243.

NIELD, D.A., (1987). Convective instability in porous media with throughflow, AIChE Journal, **33** (7) 1222-1224.

NIELD, D.A. and KUZNETSOV, A.V., (2006). The onset of bio-thermal convection in a suspension of gyrotactic microorganisms in a fluid layer: Oscillatory convection, Int. J. of Thermal Sciences, **45** (10) 990-997.

NGUYEN-QUANG, T. et ALLOUI, Z., Expériences sur la formation de la bioconvection gravitactique dans une suspension de *Tetrahymena* dans une cavité fluide. Laboratoire de microbiologie et de contrôle des infections, Université de Montréal, Novembre 2005 (non publié).

NOEVER, D.A., (1991). Evolution of bioconvective patterns in variable gravity, Phys. Rev. A, **44**, 8, 5279-5291.

PATANKAR, S.V., (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc Graw Hill Editions, London

PEDLEY, T.J., HILL, N.A. and KESSLER, J.O., (1988). The growth of bioconvection patterns in a uniform suspension of gyrotactic microorganisms, J. Fluid Mech., 195, 223-238.

PEDLEY, T.J. and KESSLER, J.O., (1992). Hydrodynamic phenomena in suspensions of swimming microorganisms, Ann. Rev. Fluid Mech., 24, 313-358

PLATT, J.R., (1961). Bioconvection patterns in cultures of free-swimming organisms, Science, 133, 1766.

PLESSET, M.S., and WINET, H., (1974). Bioconvection patterns in swimming microorganism cultures as an example of Rayleigh-Taylor instability, Nature, 248, 441-443.

QUINTARD, M. and PROUVOST, L., (1982). Instabilites de zones de diffusion thermique instationnaires en milieu poreux, Int. J. Heat Mass Transfer, 25, 1, 37-44.

SHIVAKUMARA, I.S., (1999). Boundary and inertia effects on convection in porous media with throughflow, Acta Mechanica, 137, 151-165.

SUTTON, F.M., (1970). Onset of Convection in a Porous Channel with Net Throughflow, Physics of Fluids, 13, 8, 1931-1934.

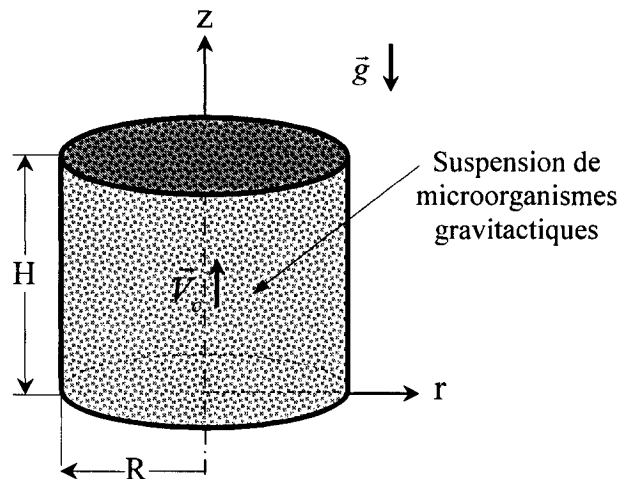
WAGER, H., (1911). On the effect of gravity upon the movements and aggregation of *Euglena Viridis*, Ehrb., and other microorganisms, Philos. Trans. R.Soc. Lond. Ser B 201, 333-390.

WOODING, R.A., (1960). Rayleigh instability of thermal boundary layer in flow through porous medium, J. Fluid Mech., 9, 2, 183-192.

## ANNEXE A

### FORMULATION MATHÉMATIQUE DE LA BIOCONVECTION GRAVITACTIQUE DANS UN CYLINDRE VERTICAL

Le système physique étudié est constitué d'un cylindre vertical de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  contenant une suspension de microorganismes gravitactiques nageant avec une vitesse ascendante  $\vec{V}_c$  (Figure A.1), la concentration à l'intérieur du cylindre est égale à  $\bar{n}$  et les parois du cylindre sont considérés solides et imperméables.



**Figure A.1** : Représentation schématique du cylindre et du système de coordonnées

#### ***Formulation mathématique***

Les champs de vitesse et de concentration peuvent être décrits par les équations de conservation de masse (2.1), de conservation de quantité de mouvement (2.2) et de conservation de cellules (2.3). Nous considérons ici le modèle gravitactique, c'est-à-dire que les microorganismes nagent en moyenne verticalement vers le haut et les hypothèses simplificatrices sont les mêmes que celles énoncées dans le chapitre II, plus la supposition que l'écoulement est axisymétrique.

Dans les coordonnées cylindriques les composantes de la vitesse peuvent être exprimé par la fonction de courant comme suit :

$$\vec{u}' = \frac{1}{r'} \left( -\frac{\partial \psi'}{\partial z'}, \frac{\partial \psi'}{\partial r'} \right) \quad (\text{A.1})$$

La vorticité est définie par :

$$\omega' = \frac{\partial v'}{\partial r'} - \frac{\partial u'}{\partial z'} \quad (\text{A.2})$$

En utilisant la formulation en terme de vorticité et de fonction de courant nous avons le système d'équation suivant :

$$\omega' = -\frac{1}{r'} \nabla^2 \psi' + \frac{2}{r'^2} \frac{\partial \psi'}{\partial r'} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} + u' \frac{\partial \omega'}{\partial r'} + v' \frac{\partial \omega'}{\partial z'} = \nu \left( \nabla^2 \omega' - \frac{\omega'}{r'^2} \right) + g \frac{\nu \Delta \rho}{\rho} \frac{\partial n'}{\partial r'} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} = -\nabla \cdot [(\vec{u}' + \vec{V}_c') n' - D_c \nabla n'] \quad (\text{A.5})$$

### **Formulation adimensionnelle du problème**

Les équations décrivant le problème sont rendues adimensionnelles en utilisant les échelles suivantes :

$H$  facteur d'échelle pour la longueur (hauteur de la cavité).

$\frac{D_c}{H}$  facteur d'échelle pour la vitesse.

$\bar{n}$  facteur d'échelle pour la concentration.

Nous obtenons alors les équations sous forme adimensionnelle :

$$\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + v \frac{\partial \omega}{\partial z} = Sc \left( \nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + Sc Ra \frac{\partial n}{\partial r} \quad (\text{A.7})$$



$$\frac{\partial n}{\partial t} + u \frac{\partial n}{\partial r} + (v + Pe) \frac{\partial n}{\partial z} = \nabla^2 n \quad (\text{A.8})$$

avec :

$$Sc = \frac{\nu}{D_c} \quad \text{le nombre de Schmidt.}$$

$$Pe = \frac{V_c H}{D_c} \quad \text{le nombre de Peclet.}$$

$$Ra = \frac{g \nu \Delta \rho \bar{n} H^3}{\rho \nu D_c} \quad \text{le nombre de Rayleigh.}$$

### Condition initial

Au temps initial

$$\text{à } t = 0 : n = \bar{n} \quad (\text{A.9})$$

### Conditions aux limites

Les conditions aux limites dynamique et massique, associées au problème sont :

$$\psi = 0 \quad \text{à } r = A_c \text{ et } z = 0, 1 \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial n}{\partial r} = 0 \quad \text{à } r = 0, A_c \quad (\text{A.11})$$

$$nPe - \frac{\partial n}{\partial z} = 0 \quad \text{à } z = 0, 1 \quad (\text{A.12})$$

$$A_c = \frac{R}{H} \quad \text{est le facteur de forme du cylindre.}$$

## ANNEXE B

### BACKGROUND BIOLOGIQUE

#### ***Les microorganismes***

##### **Définition**

Un microorganisme est tout organisme vivant visible seulement au microscope. Appartenant aux trois règnes (bactéries, levures, protozoaires). Ils sont aussi des agents actifs dans les fermentations et participent à la décomposition des matières organiques. Chaque cellule contient plusieurs milliers d'enzymes, chacune étant capable de catalyser un type de réactions chimiques. Ainsi les biotechnologies nouvelles reposent maintenant à la fois sur l'usage des microorganismes vivants, mais aussi sur celui des enzymes isolées des cellules et sur des cellules mortes agissant comme réservoirs d'enzymes.

##### **Les principaux comportements**

Les microorganismes répondent à certain stimulus par la natation, en moyenne, dans une direction particulière, ces réponses s'appellent « **taxes** ». Il y a plusieurs types de taxes suivant le stimulus, les quatre principaux types de taxies selon les sources de stimulation sont:

**Gravitaxie** : la direction de natation de la cellule est opposée au sens de la gravité, elle est aussi appelée « *Géotaxie négative* ».

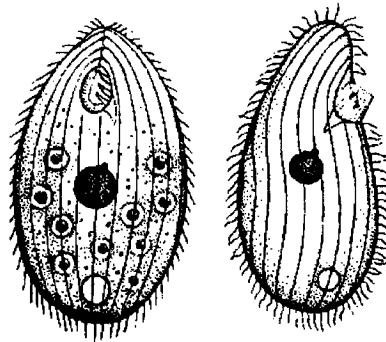
**Chimiotaxie** : le sens de natation est dirigé vers un gradient chimique. Le cas particulier est celui de gradient de concentration d'oxygène, appelé « *aérotaxie* » ou « *oxytaxie* ».

**Phototaxie :** le mouvement de natation est orienté vers (ou loin) d'une source de lumière.

**Gyrotaxie :** l'orientation de natation est dirigée par la balance entre le moment due à la gravité sur une cellule d'une part, et le moment due aux forces visqueuses provoquées par les cisaillements dans l'écoulement local d'autre part.

### Quelques types de microorganismes et leurs caractéristique physiques

#### TETRAHYMENA PYRIFORMIS



Type : Protozoaire cillé

Comportement principale: GRAVITAXIS

Diamètre moyen : 35  $\mu\text{m}$

Longueur maximale : 50÷70  $\mu\text{m}$

Volume de la cellule :  $8,9 \times 10^{-12} \text{ cm}^3$

Densité : 1,035  $\text{g/cm}^3$

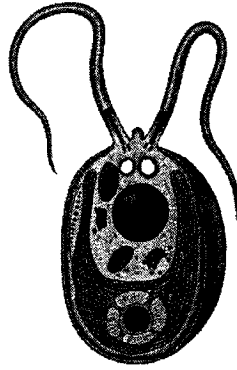
Ratio de densité : 0,035

Coefficient de diffusion :  $3,3 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$

Vitesse de natation : 500  $\mu\text{m} / \text{s}$

Concentration moyenne :  $5 \times 10^6 \text{ cells/cm}^3$

## CHLAMYDOMONAS NIVALIS



Type : Algue flagellé

Comportement principale: GYROTAXIS

Diamètre moyen :  $10^{-3}$  cm

Longueur maximum : 10-20  $\mu$ m

Volume de la cellule :  $5 \times 10^{-10}$  cm<sup>3</sup>

Densité : 1,05 g/cm<sup>3</sup>

Ratio de densité : 0,05

Paramètre d'excentricité : 0,2-0,31

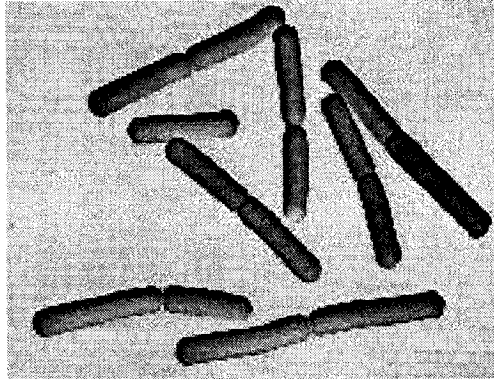
Coefficient de diffusion :  $5 \times 10^{-4}$  cm<sup>2</sup>/s

Nombre de Gyrotaxis : 0,5/d<sup>2</sup>

Vitesse de natation :  $10^{-2}$  cm/s

Concentration moyenne :  $10^6$  cells/cm<sup>3</sup>

## BACILLUS SUBTILIS



Type : Bactérie

Comportement principale : OXYTAXIS

Diamètre moyen :  $0,7 \mu\text{m}$

Longueur maximum :  $2 \div 6 \mu\text{m}$

Volume de la cellule :  $10^{-12} \text{cm}^3$

Densité :  $1,10 \text{g/cm}^3$

Ratio de densité : 0,1

Coefficient de diffusion :  $1,3 \times 10^{-6} \text{cm}^2/\text{s}$

Vitesse de natation :  $2 \times 10^{-3} \text{cm/s}$

Concentration moyenne :  $10^7\text{-}10^9 \text{cells/cm}^3$

Magnitude de concentration d'oxygène :  $10^{17} \text{molécule/cm}^3$

Constante de dissociation :  $10^{20} \text{molécule/cm}^3$